Begleitblatt **Alg** zur Vorlesung **Höhere Festigkeitslehre**
TFH Berlin, FB VIII, Prof. Dr.-Ing. A. Krawietz

Vektor- und Tensoralgebra

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$: Orthonormierte Basis

Vektoren: $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \, \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum_{k=1}^3 b_k \, \mathbf{e}_k$, zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ eingeschlossener Winkel: ϕ

Addition: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 (a_i + b_i) \, \mathbf{e}_i$

Skalarprodukt (Punktprodukt):

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\phi = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_i \, b_k \, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_i \, b_k \, \delta_{ik} = \sum_{i=1}^3 a_i \, b_i$

— letzteres ist das Matrizenprodukt der Zeilenmatrix von $\mathbf{a}$ mit der Spaltenmatrix von $\mathbf{b}$ —
wegen $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$, mit dem Kronecker-Symbol:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad i = k \\ 0 & \text{wenn} \quad i \neq k \end{cases}$$

Es ist $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ und $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = \sum_{i=1}^3 a_i^2$.

Basiswechsel: $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \, \mathbf{e}_i = \sum_{l=1}^3 a_l^* \, \mathbf{e}_l^*$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_m^* = \sum_{i=1}^3 a_i \, (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m^*) = \sum_{l=1}^3 a_l^* \, \mathbf{e}_l^* \cdot \mathbf{e}_m^* = \sum_{l=1}^3 a_l^* \, \delta_{lm} = a_m^*$$

Daraus Komponententransformationsformel $a_m^* = \sum_{i=1}^3 a_i \, (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m^*)$ sowie Darstellung der skalaren Komponente als Skalarprodukt des Vektors mit dem Basisvektor $a_m^* = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_m^*$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt): $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}$. Der Ergebnisvektor $\mathbf{v}$ steht senkrecht auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$; die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}$ bilden ein Rechtssystem, Betrag von $\mathbf{v}$ aus $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\phi$.

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Es ist $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Spatprodukt:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz für doppelte Vektorprodukte: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \, \mathbf{c}$

Tensoren:

Der einfachste Tensor (2. Stufe) ist das *dyadische Produkt* zweier Vektoren $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$,
für das folgendes *Punktprodukt mit einem Vektor* definiert wird:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

Der allgemeine Tensor 2. Stufe läßt sich als Summe dreier dyadischer Produkte schreiben, beispielsweise in der Form

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{a}_j \otimes \mathbf{e}_j \;.$$

Wie Cauchy erstmals aus dem Kraftgleichgewicht an einem kleinen Tetraeder erschlossen hat, läßt sich der Spannungsvektor $\mathbf{t}$ auf einer Schnittfläche mit dem Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ ausdrücken durch die drei Spannungsvektoren $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$ auf den Schnittflächen senkrecht zu den drei Basisvektoren $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ in der Form

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1\,(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{t}_2\,(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{t}_3\,(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n})$$

Mit dem Spannungstensor

$$\mathbf{T} = \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

läßt sich das prägnant schreiben als *Punktprodukt von Tensor und Vektor*

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$$

Einsetzen der Komponentendarstellungen $\mathbf{t}_k = \sum_{j=1}^{3} t_{jk}\,\mathbf{e}_j$ der drei Spannungsvektoren gibt die Komponentendarstellung des Spannungstensors

$$\mathbf{T} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} t_{jk}\,\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} \;&=\; \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} t_{jk}\,\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \cdot \sum_{l=1}^{3} n_l\,\mathbf{e}_l = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} t_{jk} n_l\,\mathbf{e}_j (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l) \\
&= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} t_{jk} n_l \delta_{kl}\,\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} t_{jl} n_l\,\mathbf{e}_j \\
&= \sum_{j=1}^{3} t_j\,\mathbf{e}_j \qquad \Longrightarrow \qquad t_j = \sum_{l=1}^{3} t_{jl} n_l\,, \qquad j = 1,2,3
\end{aligned}$$

Die Spaltenmatrix der Komponenten des Spannungsvektors $\mathbf{t}$ berechnet sich also als Produkt der quadratischen Matrix der Komponenten des Spannungstensors $\mathbf{T}$ mit der Spaltenmatrix der Komponenten des Normaleneinheitsvektors $\mathbf{n}$.

Basiswechsel: $\mathbf{T} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} t_{jk}\,\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} t^*_{lm}\,\mathbf{e}^*_l \otimes \mathbf{e}^*_m$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbf{e}^*_p \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^*_q = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} t_{jk}\,(\mathbf{e}^*_p \cdot \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^*_q) = t^*_{pq}$$

Wegen

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i\,(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{a}$$

erkennt man, daß die identische Abbildung jedes Vektors durch den *Einheitstensor*

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \delta_{jk}\,\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

vermittelt wird. Seine Komponentenmatrix ist die Einheitsmatrix, die auf der Diagonalen mit Einsen und außerhalb der Diagonalen mit Nullen besetzt ist.

Eigenwertproblem: Beim Spannungstensor ergibt es sich aus der Frage nach Schnitten, auf denen keine Schubspannungen wirken, also der Spannungsvektor parallel zum Normaleneinheitsvektor ist.

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \sigma\,\mathbf{n} \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{T} - \sigma \mathbf{1}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Die dieser Vektorgleichung entsprechenden drei skalaren homogenen linearen Gleichungen besitzen genau dann eine nichttriviale Lösung $\mathbf{n}$, wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet:

$$\det(\mathbf{T} - \sigma \mathbf{1}) = -\sigma^3 + I_1\,\sigma^2 - I_2\,\sigma + I_3 = 0$$

Die drei Koeffizienten dieser kubischen Gleichung in σ — die Eigenwertgleichung oder charakteristische Gleichung des Tensors $\mathbf{T}$ genannt wird — sind von der Basiswahl unabhängig und heißen die drei Invarianten von $\mathbf{T}$. In Komponenten berechnen sie sich zu

$$I_1 = \mathrm{tr}\ \mathbf{T} = t_{11}+t_{22}+t_{33}\,, \quad I_2 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{13} \\ t_{31} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{vmatrix}\,, \quad I_3 = \det \mathbf{T} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix}$$

Die erste Invariante (I_1) heißt auch Spur (trace) und die dritte (I_3) Determinante von $\mathbf{T}$, denn sie werden als die Spur (=Diagonalsumme) bzw. die Determinante der Komponentenmatrix von $\mathbf{T}$ — bei jeder beliebigen Wahl der orthonormierten Basis — gebildet.

Aus dem Momentengleichgewicht an einem kleinen Quader folgt die Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen, also die Symmetrie des Spannungstensors und seiner Komponentenmatrix ($t_{ik} = t_{ki}$). Das garantiert, daß alle drei Wurzeln $\{\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}\}$ der charakteristischen Gleichung — Hauptnormalspannungen bzw. allgemein Eigenwerte des Tensors genannt — reell sind. Einsetzen in die homogenen Gleichungen liefert zu jedem Eigenwert mindestens einen Richtungsvektor $\mathbf{n}$ — Hauptspannungsrichtung bzw. allgemein Eigenvektor des Tensors genannt. Wenn die drei Hauptspannungen voneinander verschieden sind, dann sind — wie sich mittels der Symmetrie von $\mathbf{T}$ beweisen läßt — die zugehörigen drei Hauptrichtungen orthogonal zueinander. Wählen wir diese normierten Eigenvektoren $\{\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}\}$ als Basis, so besitzt der Spannungstensor die Darstellung

$$\mathbf{T} = \sigma_I\,\mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \sigma_{II}\,\mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \sigma_{III}\,\mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III}$$

Die Komponentenmatrix bezüglich dieser Basis hat also Diagonalform.

Weitere Rechenregeln:

Transponieren:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{a} = \mathbf{a}\, (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^T \cdot \mathbf{c}$$

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} f_{jk}\, \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F}^T = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} f_{jk}\, \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} f_{kj}\, \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

Die Komponentenmatrix des transponierten Tensors $\mathbf{F}^T$ ist also die transponierte Matrix des Tensors $\mathbf{F}$.

Symmetrie und Antimetrie:

$$\mathbf{A} = \text{sym } \mathbf{A} + \text{skw } \mathbf{A} \qquad \text{mit} \qquad \text{sym } \mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\,, \quad \text{skw } \mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

Hintereinanderschaltung von Abbildungen (Punktprodukt von Tensor und Tensor):

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, (\mathbf{a} \otimes \mathbf{d})$$

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$$

Invertieren:
Wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$ gilt, dann besitzt die lineare Vektorgleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{z}$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{y}$, die sich darstellen läßt als $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{z}$. Also gilt für den inversen Tensor

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1}$$

Zerlegung in Deviator und Kugeltensor:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \frac{\text{tr } \mathbf{A}}{3}\, \mathbf{1} \quad \text{mit} \quad \text{tr } \mathbf{A}' = 0$$

Der Deviator berechnet sich aus:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{\text{tr } \mathbf{A}}{3}\, \mathbf{1}$$

Orthogonale Tensoren besitzen die Eigenschaft

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T\,, \quad |\det \mathbf{Q}| = 1$$

Wenn $\det \mathbf{Q} = +1$ gilt, handelt es sich um einen Versor, der eine Drehung mit dem Winkel ψ um eine Achse mit dem Einheitsvektor $\mathbf{a}$ im Sinne einer Rechtsschraube beschreibt gemäß

$$\mathbf{Q} = \cos\psi\, \mathbf{1} + (1 - \cos\psi)\, \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \sin\psi\, \mathbf{a} \times \mathbf{1}$$

Kreuzprodukt von Vektor und Tensor:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times \mathbf{a} = a_1(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) + a_2(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) + a_3(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{1})^T$$

Doppelpunktprodukt von Tensoren:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot\cdot\, \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} \cdot\cdot\, \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

$$\mathbf{B} \cdot\cdot\, \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{B} = \text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{ki}\,, \quad \text{tr } \mathbf{A} = \mathbf{1} \cdot\cdot\, \mathbf{A}\,, \quad \mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}$$

Begleitblatt **An** zur Vorlesung **Höhere Festigkeitslehre**
TFH Berlin, FB VIII, Prof. Dr.-Ing. A. Krawietz

Vektor- und Tensoranalysis

Koordinatensysteme

Punkte im dreidimensionalen Raum lassen sich durch Angabe von drei Zahlenwerten q_1, q_2, q_3 — den Koordinaten — beschreiben. Im folgenden werden nur *orthogonale Koordinatensysteme* betrachtet!
Die kartesischen Koordinaten x, y, z besitzen als einzige ein geradliniges orthogonales Koordinatennetz, bei allen anderen orthogonalen Koordinatensystemen — z.B. den Zylinderkoordinaten r, ϕ, z — ist das Koordinatennetz krummlinig.

Der Ortsvektor eines Punktes läßt sich durch die Koordinaten ausdrücken als $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$.

Kartesisch: $\mathbf{r}(x, y, z) = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$

Zylindrisch: $\mathbf{r}(r, \phi, z) = r\cos\phi\,\mathbf{e}_x + r\sin\phi\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$

Ableitung des Ortsvektors nach einer Koordinate liefert am betrachteten Raumpunkt einen Tangentenvektor an die betreffende Koordinatenlinie:

$$\mathbf{g}_j(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_j} = h_j(q_1, q_2, q_3)\,\mathbf{e}_j(q_1, q_2, q_3)$$

Die Beträge $\{h_1, h_2, h_3\}$ der drei Tangentenvektoren werden *Maßstabsfaktoren* genannt. Die drei Einheitsvektoren $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ in Richtung der drei Tangentenvektoren bilden an jedem Raumpunkt die *lokale orthonormierte Basis*, auf welche die dortigen Vektoren und Tensoren zu beziehen sind.

Kartesisch:

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{e}_x\,, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{e}_y\,, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z$$

Nur im Fall der kartesischen Koordinaten ist die Basis im ganzen Raum konstant, und die Maßstabsfaktoren sind $\{1, 1, 1\}$.

Zylindrisch:

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_r(\phi)\,, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r\,(-\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y) = r\,\mathbf{e}_\phi(\phi)\,, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z$$

Punkte mit verschiedenen Winkeln ϕ besitzen unterschiedliche Basen; die Maßstabsfaktoren sind $\{1, r, 1\}$.

Das totale Differential

$\Theta(\mathbf{r})$ soll eine skalare, vektorielle oder tensorielle Funktion des Ortes — eine sog. Feldfunktion — sein. Nach Einführung eines Koordinatensystems läßt sie sich darstellen als $\Theta(q_1, q_2, q_3)$.
Wenn man die Werte von $\{q_1, q_2, q_3\}$ um $\{dq_1, dq_2, dq_3\}$ abändert, so läßt die Änderung von Θ sich — wenn Θ am betrachteten Punkt differenzierbar ist — durch einen in den Zuwächsen $\{dq_1, dq_2, dq_3\}$ linearen Ausdruck approximieren, der totales Differential $d\Theta$ genannt wird und sich wie folgt berechnet:

$$d\Theta = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial \Theta}{\partial q_l} dq_l$$

Insbesondere ergibt sich für die Wahl $\Theta = \mathbf{r}$:

$$d\mathbf{r} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l} dq_l = \sum_{l=1}^{3} h_l dq_l \, \mathbf{e}_l = \sum_{l=1}^{3} ds_l \, \mathbf{e}_l$$

Dabei wurden abkürzend die Bogenlängenelemente $ds_l = h_l dq_l, \; l = 1,2,3$ der drei Koordinatenlinien eingeführt. Entsprechend definiert man die Ableitung nach der Bogenlänge der Koordinatenlinie j als

$$\frac{\partial}{\partial s_j} = \frac{\partial}{h_j \partial q_j}$$

Damit läßt das totale Differential einer skalaren Feldfunktion Θ sich schreiben als

$$d\Theta = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial \Theta}{\partial s_l} ds_l = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \Theta}{\partial s_m} \mathbf{e}_m \cdot \sum_{l=1}^{3} ds_l \, \mathbf{e}_l = \operatorname{grad} \Theta \cdot d\mathbf{r}$$

Der Vektor $\operatorname{grad} \Theta$ — *Gradient* von Θ genannt — berechnet sich also als

$$\operatorname{grad} \Theta = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \Theta}{\partial s_m} \mathbf{e}_m$$

und liefert die lineare Abbildung von $d\mathbf{r}$ in $d\Theta$.

Das totale Differential einer vektoriellen Feldfunktion $\Theta = \mathbf{v}$ läßt sich schreiben als

$$d\mathbf{v} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_l} ds_l = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_m} \otimes \mathbf{e}_m \cdot \sum_{l=1}^{3} ds_l \, \mathbf{e}_l = \operatorname{grad} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Der Tensor $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ — *Vektorgradient* von $\mathbf{v}$ genannt — berechnet sich also als

$$\operatorname{grad} \mathbf{v} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_m} \otimes \mathbf{e}_m$$

und liefert die lineare Abbildung von $d\mathbf{r}$ in $d\mathbf{v}$.

Mit dem Ableitungsvektor ∇ — gesprochen: Nabla — gemäß

$$\nabla = \sum_{m=1}^{3} \mathbf{e}_m \frac{\partial}{\partial s_m}$$

lassen Gradient und Vektorgradient sich auch schreiben als

$$\operatorname{grad} \Theta = \nabla \Theta \,, \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{grad} \mathbf{v} = \mathbf{v} \otimes \nabla$$

Es genügt, sich einzuprägen

$$\boxed{d \equiv d\mathbf{r} \cdot \nabla} \qquad \left(= \sum_{m=1}^{3} ds_j \frac{\partial}{\partial s_j} \right)$$

denn dann findet man sogleich

$$d\Theta = d\mathbf{r} \cdot \nabla \, \Theta = d\mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} \Theta \,, \qquad d\mathbf{v} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \, \mathbf{v} = \mathbf{v} \, (\nabla \cdot d\mathbf{r}) = (\mathbf{v} \otimes \nabla) \cdot d\mathbf{r} = \operatorname{grad} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Komponentenrechnungen

Bei der praktischen Berechnung des Vektorgradienten ist zu beachten, daß bei krummlinigen Koordinatensystemen nicht nur die skalaren Vektorkomponenten, sondern auch die Basisvektoren sich längs der Koordinatenlinien ändern. Also gilt

$$\mathbf{v} = \sum_{l=1}^{3} v_l \, \mathbf{e}_l \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_q} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial v_l}{\partial s_q} \, \mathbf{e}_l + \sum_{l=1}^{3} v_l \, \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial s_q}$$

Die auf die lokale Basis bezogenen skalaren Komponenten des Tensors $\mathbf{A} = \operatorname{grad} \mathbf{v}$ berechnen sich also gemäß

$$a_{pq} = \mathbf{e}_p \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_q = \mathbf{e}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_q} \quad = \quad \frac{\partial v_p}{\partial s_q} + \sum_{l=1}^{3} v_l \; \mathbf{e}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial s_q}$$

Kartesisch: Es gilt

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

die Basisvektoren hängen nicht von den Koordinaten ab, und die Komponentenmatrix des Vektorgradienten ist daher die sog. Jacobische:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Zylindrisch: Es gilt

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Man findet

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \mathbf{e}_\phi \, , \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_r$$

also

$$\mathbf{e}_\phi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial s_\phi} = -\mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial s_\phi} = \frac{1}{r}$$

und die Komponentenmatrix des Vektorgradienten — bezogen auf die lokale Basis — wird

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_r}{r \partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{\partial v_\phi}{r \partial \phi} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{r \partial \phi} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Aus dem Tensorfeld $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ lassen sich zwei weitere Felder bilden. Ersetzt man die dyadischen Produkte durch Punktprodukte — d.h. bildet man die Spur — so ergibt sich ein skalares Feld, das *Divergenz* von $\mathbf{v}$ genannt wird:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla = \operatorname{tr}(\mathbf{v} \otimes \nabla) = \operatorname{tr} \operatorname{grad} \mathbf{v}$$

Ersetzt man die dyadischen Produkte durch Kreuzprodukte — das Ergebnis hängt nur vom antimetrischen Anteil von $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ ab — und kehrt das Vorzeichen um, so ergibt sich ein Vektorfeld, das *Rotation* (oder Rotor, engl. curl) von $\mathbf{v}$ genannt wird:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \nabla$$

Die *Divergenz eines Tensors* $\mathbf{T}$ wird erklärt als

$$\operatorname{div}\mathbf{T} = \mathbf{T}\cdot\nabla = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} t_{ik}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_k\cdot\sum_{m=1}^{3}\mathbf{e}_m\,\frac{\partial}{\partial s_m} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial t_{ik}}{\partial s_k}\,\mathbf{e}_i + t_{ik}\,\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial s_k} + t_{ik}\left(\sum_{m=1}^{3}\mathbf{e}_m\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial s_m}\right)\mathbf{e}_i\right)$$

Die genannten Ableitungsoperationen beschafft man sich zweckmäßig mit Hilfe eines Computeralgebra-Systems. In MapleV lassen sich der Gradient eines skalaren Feldes sowie Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes in beliebigen orthogonalen Koordinatensystemen berechnen. Die gebräuchlichsten Koordinatensysteme werden dabei einfach mit ihrem Namen bezeichnet; beliebige andere Systeme lassen sich durch Angabe der drei Maßstabsfaktoren $h_j(q_1, q_2, q_3)\,,\ j = 1, 2, 3$ definieren. Der Vektorgradient läßt sich zunächst nur kartesisch und die Tensordivergenz gar nicht berechnen. Abhilfe schaffen die Prozeduren `vecgrad` und `tensdiv`, die in den Übungen zur Verfügung gestellt werden.

Zweite Ableitungen

Es gilt $\nabla\times\nabla = 0$, wie man am einfachsten mittels der kartesischen Darstellung zeigt. Daher ist

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Theta = \nabla\times\nabla\,\Theta = \mathbf{0}\,, \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) = (\nabla\times\nabla)\cdot\mathbf{v} = 0$$

Aus dem Entwicklungssatz für doppelte Vektorprodukte folgt ferner

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\mathbf{v} = (\mathbf{v}\otimes\nabla)\cdot\nabla = (\nabla\cdot\nabla)\,\mathbf{v} \equiv \Delta\,\mathbf{v} = \nabla\,(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{v}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}$$

Diese Formel ist beispielsweise nützlich, um mit MapleV die Divergenz eines Vektorgradienten in krummlinigen Koordinatensystemen auszurechnen, falls die Prozeduren `vecgrad` und `tensdiv` nicht zur Verfügung stehen.
Standardmäßig kann der *Laplace-Operator* $\Delta \equiv \nabla\cdot\nabla = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ in MapleV — auch in krummlinigen Koordinatensystemen — auf skalare Felder angewendet werden, also in der Form

$$\Delta\Theta = \nabla\cdot\nabla\,\Theta = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Theta$$

Kartesisch:

$$\Delta\Theta = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}$$

Zylindrisch:

$$\Delta\Theta = \frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\Theta}{r^2\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}$$

Anwendungen der Vektor- und Tensoranalysis in der klassischen Kontinuumsphysik

Wärmeleitung im ruhenden Medium

Energiebilanz: $\quad -\operatorname{div}\mathbf{q} = \varrho c\dot{\Theta}$

Stoffgesetz nach Fourier (linear, isotrop): $\quad \mathbf{q} = -\lambda\operatorname{grad}\Theta$

Homogenes Medium:

$$\Longrightarrow \quad \Delta\Theta \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}\Theta = \frac{\varrho c}{\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial t}$$

(Instationäre Wärmeleitungsgleichung)

Elektrodynamik ruhender Medien

Maxwellsche Gleichungen:

$$\operatorname{rot}\mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{b} = 0\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{i}\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{d} = 0$$

Stoffgesetze nach Hertz und Ohm (linear, isotrop): $\mathbf{d} = \epsilon\,\mathbf{e}$, $\mathbf{b} = \mu\,\mathbf{h}$, $\mathbf{i} = \sigma\,\mathbf{e}$

Homogenes Medium:

$$\Longrightarrow \quad \Delta\mathbf{b} \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}\mathbf{b} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{b} = \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{b}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$$

(Elektromagnetische Wellengleichung)

Strömungsmechanik

Inkompressibilität: $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$

Potentialströmung: $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\Psi \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (Wirbelfreiheit)

$$\Longrightarrow \quad \Delta\Psi \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}\Psi = 0$$

(Potentialgleichung oder Laplace-Gleichung)

Zähe Strömung:

Verzerrungsgeschwindigkeit: $\mathbf{D} = \operatorname{sym}\operatorname{grad}\mathbf{v}$

Impulsbilanz: $\operatorname{div}\mathbf{T} + \varrho\mathbf{b} = \varrho\dot{\mathbf{v}}$

Stoffgesetz nach Newton (linear): $\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + 2\mu\,\mathbf{D}$

Homogenes Medium:

$$\Longrightarrow \quad \mu\,\Delta\mathbf{v} - \operatorname{grad}p + \varrho\mathbf{b} = \varrho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)$$

(Navier-Stokes-Gleichung)

Thermoelastizität

Verzerrungstensor (kleine Verformungen): $\mathbf{E} = \operatorname{sym}\operatorname{grad}\mathbf{u}$

Impulsbilanz: $\operatorname{div}\mathbf{T} + \varrho\mathbf{b} = \varrho\ddot{\mathbf{u}}$

Stoffgesetz nach Hooke (linear, isotrop):

$$\mathbf{T} = 2G\left((\mathbf{E} - \alpha\Theta\mathbf{1}) + \frac{\nu}{1-2\nu}\operatorname{tr}(\mathbf{E} - \alpha\Theta\mathbf{1})\,\mathbf{1}\right)$$

Homogenes Medium:

$$\Longrightarrow \Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\,\alpha\operatorname{grad}\Theta + \frac{\varrho}{G}\mathbf{b} = \frac{\varrho}{G}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}$$

(Lamésche Gleichung)