Begleitblatt **F** zur Vorlesung **Höhere Festigkeitslehre**
TFH Berlin, FB VIII, Prof. Dr.-Ing. A. Krawietz

Flächentragwerke

Gekrümmte Flächentragwerke werden als Schalen, ebene je nach Belastung als Platten oder Scheiben bezeichnet.
Ortsvektor der Schalenpunkte in der unverformten Ausgangslage ist: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\mathrm{M} + z\mathbf{n}$.
Die Fläche $z = 0$ heißt Mittelfläche der Schale; $\mathbf{n}$ ist der örtliche Normaleneinheitsvektor der Mittelfläche.
Bezeichnen q_1 und q_2 orthogonale Koordinaten auf der Mittelfläche, so wird die planare Ableitung (tangential zur Mittelfläche) mittels der Tangenteneinheitsvektoren und der Ableitungen nach den Bogenlängen der beiden Parameterlinien eingeführt als

$$\nabla_p = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial s_2} \ . \tag{1}$$

Die örtliche Krümmung der Schale wird beschrieben durch den Krümmungstensor (auch Haupttensor genannt) $\mathbf{K}$ gemäß

$$\mathbf{K} = -\mathbf{n} \otimes \nabla_p \ . \tag{2}$$

Es lässt sich zeigen, dass dieser Tensor symmetrisch ist und folglich tangential zur Mittelfläche zwei orthogonale Eigenvektoren $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ besitzt, welche die beiden Hauptkrümmungsrichtungen definieren. Mit den beiden als Hauptkrümmungen bezeichneten Eigenwerten k_1, k_2 schreibt der Krümmungstensor sich also als

$$\mathbf{K} = k_1\, \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 + k_2\, \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 \ . \tag{3}$$

Wenn möglich werden Hauptkrümmungslinien als Koordinatenlinien auf der Fläche benutzt (z.B. bei Rotationsschalen), so dass gilt $\hat{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2$.

Verformungen

Die Reduktion des dreidimensionalen Problems auf ein zweidimensionales geschieht, indem folgende *Annahme über die Querschnittsverformungen* getroffen wird:
Jede ursprüngliche auf einer Normale zur Mittelfläche liegende materielle Linie verschiebt sich und dreht sich um eine Achse senkrecht zur Normalenrichtung wie ein starrer Körper. Bei Beschränkung auf kleine Drehwinkel stellen sich also die Verschiebungen aller materiellen Punkte der Schale dar als

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_\mathrm{M}, z) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}_\mathrm{M}) + \boldsymbol{\psi}_p(\mathbf{r}_\mathrm{M}) \times\ z\,\mathbf{n}(\mathbf{r}_\mathrm{M}) \ . \tag{4}$$

Die Schalenverformung wird auf diese Weise festgelegt durch zwei vektorielle Funktionen der unabhängigen Variablen $\mathbf{r}_\mathrm{M}$, nämlich
1) die Mittelflächenverschiebung

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}_\mathrm{M}) = u_1\,\mathbf{e}_1 + u_2\,\mathbf{e}_2 + w\,\mathbf{n} = \bar{\mathbf{u}}_p + w\,\mathbf{n} \tag{5}$$

2) und die Normalendrehung

$$\boldsymbol{\psi}_p(\mathbf{r}_\mathrm{M}) = \psi_1\,\mathbf{e}_1 + \psi_2\,\mathbf{e}_2 \ . \tag{6}$$

Das sind fünf skalare Funktionen der beiden Flächenkoordinaten. Die Abhängigkeit der Verschiebungen der Schalenpunkte von der dritten Koordinate z ist durch unsere Verschiebungsannahmen festgelegt.

Mit der Abkürzung

$$\boldsymbol{\omega}_p(\mathbf{r}_\mathrm{M}) = \boldsymbol{\psi}_p(\mathbf{r}_\mathrm{M}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}_\mathrm{M}) = \psi_2\,\mathbf{e}_1 - \psi_1\,\mathbf{e}_2 \tag{7}$$

schreibt der Verschiebungsansatz (4) sich kürzer

$$\mathbf{u}\big(\mathbf{r}_\mathrm{M}, z\big) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}_\mathrm{M}) + z\,\boldsymbol{\omega}_p(\mathbf{r}_\mathrm{M})\ . \tag{8}$$

Zum Koordinatenzuwachs dq_1 gehört auf einer als q_1-Linie gewählten Hauptkrümmungslinie auf der Mittelfläche das Bogenelement ds_1 und auf einer parallel dazu im Abstand z über der Mittelfläche verlaufenden Linie das Bogenelement $d\bar{s}_1$, zwischen denen der Zusammenhang

$$d\bar{s}_1 = (1 - z\,k_1)\,ds_1 \tag{9}$$

besteht. Entsprechendes gilt für die dazu senkrechte q_2-Linie, und damit lässt die Ableitung an einem Punkt der Schale sich unter Beachtung von (1) darstellen als

$$\nabla = \mathbf{e}_1\,\frac{\partial}{\partial\bar{s}_1} + \mathbf{e}_2\,\frac{\partial}{\partial\bar{s}_2} + \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}_1\,(1 - z\,k_1)^{-1}\,\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathbf{e}_2\,(1 - z\,k_2)^{-1}\,\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial z} = \nabla_p\cdot(\mathbf{1} - z\,\mathbf{K})^{-1} + \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial z} \tag{10}$$

(Achtung: ∇_p ist nicht auf $\mathbf{K}$ anzuwenden.)

Damit und mit der Zerlegung

$$\mathbf{1} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{1}_p + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\,, \tag{11}$$

des Einheitstensors ergibt die Ableitung der Verschiebungen sich zunächst zu

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}\big(\mathbf{r}_\mathrm{M}, z\big) \otimes \nabla = \Big(\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}_\mathrm{M}) + z\,\boldsymbol{\omega}_p(\mathbf{r}_\mathrm{M})\Big) \otimes \Big(\nabla_p \cdot (\mathbf{1} - z\,\mathbf{K})^{-1} + \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial z}\Big) \\
=\ & \big(\mathbf{1}_p + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\big) \cdot \big(\bar{\mathbf{u}} \otimes \nabla_p + z\,\boldsymbol{\omega}_p \otimes \nabla_p\big) \cdot \big(\mathbf{1} - z\,\mathbf{K}\big)^{-1} + \boldsymbol{\omega}_p \otimes \mathbf{n} \\
=\ & \big(\mathbf{1}_p \cdot \acute{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \nabla_p + z\,\mathbf{1}_p \cdot \acute{\boldsymbol{\omega}}_p \otimes \nabla_p + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \acute{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \nabla_p + z\,\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \acute{\boldsymbol{\omega}}_p \otimes \nabla_p\big) \cdot \big(\mathbf{1} - z\,\mathbf{K}\big)^{-1} + \boldsymbol{\omega}_p \otimes \mathbf{n}\ .
\end{aligned} \tag{12}$$

Die Felder, auf welche die Ableitungsoperation ∇_p anzuwenden ist, sind verdeutlichend mit einem Akzent gekennzeichnet.
Wegen $\boldsymbol{\omega}_p \cdot \mathbf{n} = 0$ und mit (2) liefert Anwendung der Produktregel

$$\mathbf{n} \cdot \acute{\boldsymbol{\omega}}_p \otimes \nabla_p = \overline{(\boldsymbol{\omega}_p \cdot \mathbf{n})}^{\,\prime}\ \nabla_p - \boldsymbol{\omega}_p \cdot \acute{\mathbf{n}} \otimes \nabla_p = \boldsymbol{\omega}_p \cdot \mathbf{K}\,, \tag{13}$$

und damit lässt sich folgende Identität bestätigen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\omega}_p &= \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\omega}_p \cdot \big(\mathbf{1} - z\,\mathbf{K}\big) \cdot \big(\mathbf{1} - z\,\mathbf{K}\big)^{-1} = \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\omega}_p \cdot \big(\mathbf{1} - z\,\mathbf{K}\big)^{-1} - z\,\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\omega}_p \cdot \mathbf{K} \cdot \big(\mathbf{1} - z\,\mathbf{K}\big)^{-1} \\
&= \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\omega}_p \cdot \big(\mathbf{1} - z\,\mathbf{K}\big)^{-1} - z\,\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \acute{\boldsymbol{\omega}}_p \otimes \nabla_p \cdot \big(\mathbf{1} - z\,\mathbf{K}\big)^{-1}\ .
\end{aligned} \tag{14}$$

Eine Umstellung dieser Gleichung zeigt, dass der vorletzte Summand von (12) dargestellt werden kann als

$$z\,\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \acute{\boldsymbol{\omega}}_p \otimes \nabla_p \cdot \big(\mathbf{1} - z\,\mathbf{K}\big)^{-1} = \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\omega}_p \cdot \big(\mathbf{1} - z\,\mathbf{K}\big)^{-1} - \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\omega}_p\,, \tag{15}$$

und aus (12) wird dann

$$\mathbf{u}\otimes\nabla = \big(\mathbf{1}_p\cdot\acute{\bar{\mathbf{u}}}\otimes\nabla_p + z\,\mathbf{1}_p\cdot\acute{\boldsymbol{\omega}}_p\otimes\nabla_p + \mathbf{n}\otimes(\mathbf{n}\cdot\acute{\bar{\mathbf{u}}}\otimes\nabla_p+\boldsymbol{\omega}_p)\big)\cdot\big(\mathbf{1}-z\,\mathbf{K}\big)^{-1} + \big[\boldsymbol{\omega}_p\otimes\mathbf{n}-\mathbf{n}\otimes\boldsymbol{\omega}_p\big]\,. \tag{16}$$

Weil wir uns auf den Fall kleiner Verformungen beschränken, ist der Verzerrungstensor als symmetrischer Teil dieses Verschiebungsgradienten zu berechnen. Der eckig geklammerte Teil ist aber antimetrisch und liefert daher keinen Beitrag zu den Verzerrungen. Der Rest enthält den gemeinsamen Faktor $(\mathbf{1}-z\,\mathbf{K})^{-1}$. In Hauptachsen und mit den Hauptkrümmungsradien $R_1 = 1/k_1$, $R_2 = 1/k_2$ schreibt die Komponentenmatrix dieses Tensors sich

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-z/R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-z/R_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{17}$$

Bei ebenen Flächentragwerken ist dieser Tensor wegen $\mathbf{K}=\mathbf{0}$ exakt gleich dem Einheitstensor, und bei hinreichend dünnwandigen Schalen kann man ihn mit ausreichender Näherung durch den Einheitstensor ersetzen. Weil $|z| \le h/2$ gilt (h: Wanddicke des Flächentragwerks), müssen dazu die Bedingungen $h \ll R_1$ und $h \ll R_2$ erfüllt sein. Auf derartige *dünnwandige Flächentragwerke*, bei denen also die Wanddicke h sehr klein ist gegen den kleinsten Krümmungsradius, wollen wir uns im Folgenden beschränken.

Bei dicken Schalen dagegen muss der Faktor $(\mathbf{1}-z\,\mathbf{K})^{-1}$ mitgeführt werden, was die Ausdrücke für die Spannungen, Schnittgrößen und Gleichgewichtsbedingungen umfangreicher gestaltet.

Für die dünnwandigen Flächentragwerke erhält die Verzerrung die Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\mathrm{M} + z\,\mathbf{B} + \mathrm{sym}\big(\mathbf{n}\otimes\boldsymbol{\gamma}\big) \tag{18}$$

mit der (planaren) *Mittelflächenverzerrung*

$$\mathbf{E}_\mathrm{M} = \mathrm{sym}\big(\mathbf{1}_p\cdot\acute{\bar{\mathbf{u}}}\otimes\nabla_p\big) \tag{19}$$

der (planaren) *Biegeverzerrung*

$$\mathbf{B} = \mathrm{sym}\big(\mathbf{1}_p\cdot\acute{\boldsymbol{\omega}}_p\otimes\nabla_p\big) \tag{20}$$

und dem (planaren) *Schubwinkelvektor*

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n}\cdot\acute{\bar{\mathbf{u}}}\otimes\nabla_p + \boldsymbol{\omega}_p\,. \tag{21}$$

Beachten wir noch

$$\bar{\mathbf{u}}\otimes\nabla_p = \big(\bar{\mathbf{u}}_p + w\,\mathbf{n}\big)\otimes\nabla_p = \bar{\mathbf{u}}_p\otimes\nabla_p + \mathbf{n}\otimes\nabla_p\acute{w} + w\,\acute{\mathbf{n}}\otimes\nabla_p = \bar{\mathbf{u}}_p\otimes\nabla_p + \mathbf{n}\otimes\nabla_p\acute{w} - w\,\mathbf{K} \tag{22}$$

und daraus folgend

$$\mathbf{1}_p\cdot\acute{\bar{\mathbf{u}}}\otimes\nabla_p = \mathbf{1}_p\cdot\acute{\bar{\mathbf{u}}}_p\otimes\nabla_p - w\,\mathbf{K} \tag{23}$$

und — wegen $\bar{\mathbf{u}}_p\cdot\mathbf{n} = 0$ —

$$\mathbf{n}\cdot\acute{\bar{\mathbf{u}}}\otimes\nabla_p = \mathbf{n}\cdot\acute{\bar{\mathbf{u}}}_p\otimes\nabla_p + \nabla_p w = \acute{\overline{(\bar{\mathbf{u}}_p\cdot\mathbf{n})}}\,\nabla_p - \bar{\mathbf{u}}_p\cdot\acute{\mathbf{n}}\otimes\nabla_p + \nabla_p w = \bar{\mathbf{u}}_p\cdot\mathbf{K} + \nabla_p w\,, \tag{24}$$

so wird bei der Mittelflächenverzerrung und dem Schubwinkelvektor der Einfluss der Krümmung und der unterschiedlichen Verschiebungskomponenten deutlich in den Darstellungen

$$\mathbf{E}_\mathrm{M} = \mathrm{sym}\big(\mathbf{1}_p\cdot\acute{\bar{\mathbf{u}}}_p\otimes\nabla_p\big) - w\,\mathbf{K} \tag{25}$$

und

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla_p w + \mathbf{K}\cdot\bar{\mathbf{u}}_p + \boldsymbol{\omega}_p\,. \tag{26}$$

Isotrop-elastisches Verhalten

Vorbetrachtung: Ebener Verzerrungs- und ebener Spannungszustand

Wir zerlegen die Verzerrungen und die Spannungen gemäß

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + e_{33}\,\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}\,, \tag{27}$$

bzw.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_p + t_{33}\,\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \boldsymbol{\tau}\,, \tag{28}$$

setzen diese Darstellungen in das dreidimensionale isotrope Hooke'sche Gesetz

$$\mathbf{T} = 2G\left(\mathbf{E} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathrm{tr}\mathbf{E}\;\mathbf{1}\right) \tag{29}$$

ein und erhalten folgende Teilaussagen:

$$\mathbf{T}_p = 2G\left(\mathbf{E}_p + \frac{\nu}{1-2\nu}(\mathrm{tr}\mathbf{E}_p + e_{33})\;\mathbf{1}_p\right)\,, \tag{30}$$

$$t_{33} = 2G\left(e_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\mathrm{tr}\mathbf{E}_p + e_{33})\right)\,, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{\tau} = G\,\boldsymbol{\gamma}\,. \tag{32}$$

Im Falle des ebenen Verzerrungszustandes ($e_{33} = 0$) berechnen sich der planare Anteil der Spannungen sowie die Normalspannung in der dritten Richtung zu

$$\mathbf{T}_p = 2G\left(\mathbf{E}_p + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathrm{tr}\mathbf{E}_p\;\mathbf{1}_p\right) \tag{33}$$

bzw.

$$t_{33} = \frac{2\,G\,\nu}{1-2\nu}\mathrm{tr}\mathbf{E}_p\,. \tag{34}$$

Im Falle des ebenen Spannungszustandes ($t_{33} = 0$) ergibt sich aus (31) zunächst die Querdehnung in der dritten Richtung zu

$$e_{33} = -\,\frac{\nu}{1-\nu}\mathrm{tr}\mathbf{E}_p\,, \tag{35}$$

und setzt man diese in (30) ein, so erhält man den Zusammenhang zwischen den planaren Anteilen von Spannung und Verzerrung in der Form

$$\mathbf{T}_p = 2G\left(\mathbf{E}_p + \frac{\nu}{1-\nu}\mathrm{tr}\mathbf{E}_p\;\mathbf{1}_p\right) \tag{36}$$

Ein Vergleich von (36) mit (33) zeigt übrigens, dass der Übergang vom ebenen Spannungs- zum ebenen Verzerrungszustand formal vollzogen werden kann durch Abänderung der Querkontraktionszahl ν bei festgehaltenem Schubmodul G.

Anwendung auf Flächentragwerke

Ein Vergleich von (18) mit (27) — es ist $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$ und $\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_{\mathrm{M}} + z\,\mathbf{B}$ zu setzen — zeigt, dass unsere Verformungsannahme (4) einen ebenen Verzerrungszustand erzeugt. Die zugehörigen Spannungen wären daher nach (33) und (34) zu berechnen. Bedenkt man aber, dass die beiden Deckflächen in der Regel frei von Normalspannungen sind und dass folglich im Inneren von dünnen Flächentragwerken die Normalspannungen in der dritten Richtung vernachlässigbar sein werden, so erscheint die Annahme eines ebenen Spannungszustandes sinnvoller, so dass es üblich ist, mit der Beziehung (36) zu arbeiten. Die zugehörige volumenspezifische Formänderungsenergie ist dann

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{T}_p \cdot\cdot \mathbf{E}_p = G\left(\mathbf{E}_p \cdot\cdot \mathbf{E}_p + \frac{\nu}{1-\nu}(\mathrm{tr}\mathbf{E}_p)^2\right) . \tag{37}$$

Zu den gemäß (32) mit dem Schubwinkel verknüpften Schubspannungen gehört die volumenspezifische Formänderungsenergie

$$\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\gamma} = \tfrac{1}{2}G\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} . \tag{38}$$

Formänderungsenergie und innere Kräfte des Flächentragwerks

Die Formänderungsenergie der gesamten Schale berechnet sich zu

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{def}} \quad &= \quad \int_A \int_{z=-h/2}^{h/2} \Bigg[G\left(\mathbf{E}_{\mathrm{M}} \cdot\cdot \mathbf{E}_{\mathrm{M}} + \frac{\nu}{1-\nu}(\mathrm{tr}\mathbf{E}_{\mathrm{M}})^2\right) + 2Gz\left(\mathbf{E}_{\mathrm{M}} \cdot\cdot \mathbf{B} + \frac{\nu}{1-\nu}(\mathrm{tr}\mathbf{E}_{\mathrm{M}})(\mathrm{tr}\mathbf{B})\right) \\ &\qquad + Gz^2\left(\mathbf{B}\cdot\cdot\mathbf{B} + \frac{\nu}{1-\nu}(\mathrm{tr}\mathbf{B})^2\right) + \tfrac{1}{2}\,G\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}\Bigg]\,dz\,dA . \end{aligned} \tag{39}$$

Für unsere dünnen Flächentragwerke wollen wir die Vereinfachung — vgl. (9) —

$$dA = d\bar{s}_1 d\bar{s}_2 = (1 - z\,k_1)\,(1 - z\,k_2)\,ds_1 ds_2 \;\approx\; ds_1 ds_2 \tag{40}$$

vornehmen, wodurch dA von z unabhängig und gleich dem Flächenelement der Schalenmittelfläche gesetzt wird. Die Integration über die Schalendicke kann für alle Summanden ausgeführt werden, wobei das Integral über den in z linearen Term verschwindet. Übrigens wird hier und im Folgenden nirgends vorausgesetzt, dass die Schalendicke überall gleich sein soll.

Es verbleibt

$$E_{\mathrm{def}} = \int_A \left[Gh\left(\mathbf{E}_{\mathrm{M}} \cdot\cdot \mathbf{E}_{\mathrm{M}} + \frac{\nu}{1-\nu}(\mathrm{tr}\mathbf{E}_{\mathrm{M}})^2\right) + G\frac{h^3}{12}\left(\mathbf{B}\cdot\cdot\mathbf{B} + \frac{\nu}{1-\nu}(\mathrm{tr}\mathbf{B})^2\right) + \tfrac{1}{2}\,Gh\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right] dA . \tag{41}$$

Die einzelnen Grundverformungsarten der Schale erscheinen entkoppelt. Man erkennt in den Querschnittswerten h und $h^3/12$ die Fläche bzw. das axiale Flächenmoment 2. Grades einer Rechteckfläche der Breite 1.

Nun betrachten wir eine virtuelle (gedachte) Verschiebung $\delta\mathbf{u}$ der Schalenpunkte im Rahmen des Ansatzes (8) und notieren die dadurch verursachte Änderung der Formänderungsenergie, also die *virtuelle Arbeit* der inneren Kräfte.

$$
\begin{aligned}
\delta E_{\text{def}} &= \int_A \left[2Gh \left(\mathbf{E}_{\text{M}} \cdot\cdot \delta \mathbf{E}_{\text{M}} + \frac{\nu}{1-\nu} (\text{tr}\mathbf{E}_{\text{M}}) \delta (\text{tr}\mathbf{E}_{\text{M}}) \right) + 2G \frac{h^3}{12} \left(\mathbf{B} \cdot\cdot \delta \mathbf{B} + \frac{\nu}{1-\nu} (\text{tr}\mathbf{B}) \delta (\text{tr}\mathbf{B}) \right) + Gh\boldsymbol{\gamma} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma} \right] dA \\
&= \int_A \left[\mathbf{S} \cdot\cdot \delta \mathbf{E}_{\text{M}} + \mathbf{M} \cdot\cdot \delta \mathbf{B} + \mathbf{q}_p \cdot \delta \boldsymbol{\gamma} \right] dA \, . \qquad (42)
\end{aligned}
$$

Die dabei abkürzend eingeführten Größen heißen *Scheibenkrafttensor* oder Membrankrafttensor

$$
\mathbf{S} = 2Gh \left(\mathbf{E}_{\text{M}} + \frac{\nu}{1-\nu} (\text{tr}\mathbf{E}_{\text{M}}) \mathbf{1}_p \right) , \qquad (43)
$$

Momententensor

$$
\mathbf{M} = 2G \frac{h^3}{12} \left(\mathbf{B} + \frac{\nu}{1-\nu} (\text{tr}\mathbf{B}) \mathbf{1}_p \right) \qquad (44)
$$

und *planarer Querkraftoperator*

$$
\mathbf{q}_p = Gh\boldsymbol{\gamma} \, . \qquad (45)
$$

Nach (18), (36), (32) berechnen die von diesen Schnittgrößen hervorgerufenen Spannungen sich zu

$$
\mathbf{T}_p = \frac{1}{h} \mathbf{S} + \frac{z}{h^3/12} \mathbf{M} \, , \qquad \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{h} \mathbf{q}_p \, , \qquad (46)
$$

was an die Formeln für Rechteckbalken erinnert.

Mit (19), (20), (21) wird aus (42) — man beachte, dass gilt $\mathbf{X} \cdot\cdot \text{sym}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X} \cdot\cdot \text{sym}(\mathbf{Y}^T) = \mathbf{X} \cdot\cdot \mathbf{Y}^T$, wenn $\mathbf{X}$ ein symmetrischer und $\mathbf{Y}$ ein beliebiger Tensor ist —

$$
\begin{aligned}
\delta E_{\text{def}} &= \int_A \left[\mathbf{S} \cdot\cdot \nabla_p \otimes \delta \acute{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{1}_p + \mathbf{M} \cdot\cdot \nabla_p \otimes \delta \acute{\boldsymbol{\omega}}_p \cdot \mathbf{1}_p + \mathbf{q}_p \cdot \left(\nabla_p \otimes \delta \acute{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n} + \delta \boldsymbol{\omega}_p \right) \right] dA \\
&= \int_A \left[\underline{\delta \acute{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{1}_p \cdot \mathbf{S} \cdot \nabla_p + \delta \acute{\boldsymbol{\omega}}_p \cdot \mathbf{1}_p \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla_p + \delta \acute{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n} \, \mathbf{q}_p \cdot \nabla_p} + \mathbf{q}_p \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_p \right] dA \\
&= \underbrace{\int_A \left[\overline{\delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{S}}' + \overline{\delta \boldsymbol{\omega}_p \cdot \mathbf{M}}' + \overline{\delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{q}_p}' \right] \cdot \nabla_p \, dA} \\
&\quad - \int_A \left[\delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \acute{\mathbf{S}} \cdot \nabla_p + \delta \boldsymbol{\omega}_p \cdot \acute{\mathbf{M}} \cdot \nabla_p + \delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{n} \otimes \mathbf{q}_p}' \cdot \nabla_p - \mathbf{q}_p \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_p \right] dA \, . \qquad (47)
\end{aligned}
$$

Dabei sind die unterstrichenen Terme mit der Produktregel behandelt worden, nachdem noch $\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}$ und $\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M}$ beachtet worden ist. Das unterklammerte Integral über die Mittelfläche lässt sich in ein Integral über die Schalenberandung überführen. Weil in der eckigen Klammer ein planares Vektorfeld abzuleiten ist, sieht der dazu benötigte Gauß'sche Satz für gekrümmte Flächen formal genauso aus wie derjenige für die ebene Fläche. (Der in der Tangentialebene liegende Normaleneinheitsvektor der Schalenberandung soll mit $\mathbf{e}$ bezeichnet werden.)

$$
\begin{aligned}
\delta E_{\text{def}} &= \oint \left[\delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \left(\mathbf{S} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{q}_p \right) \cdot \mathbf{e} + \delta \boldsymbol{\omega}_p \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{e} \right] ds \\
&\quad - \int_A \left[\delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \overline{(\mathbf{S} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{q}_p)}' \cdot \nabla_p + \delta \boldsymbol{\omega}_p \cdot (\acute{\mathbf{M}} \cdot \nabla_p - \mathbf{q}_p) \right] dA \, . \qquad (48)
\end{aligned}
$$

Im Gleichgewichtsfalle muss die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte gleich der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte sein. Diese besteht aus Arbeiten von Flächenkräften und -momenten

$$\delta W_{\mathrm{Feld}} = \int_A \big(\mathbf{p}\cdot\delta\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{m}_{\mathrm{A}}\cdot\delta\boldsymbol{\psi}_p\big)\, dA \tag{49}$$

und Arbeiten der (auf die Schnittlängeneinheit bezogenen) Schnittgrößen am Rand

$$\delta W_{\mathrm{Rand}} = \oint \big(\mathbf{f}\cdot\delta\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{m}\cdot\delta\boldsymbol{\psi}_p\big)\, ds\ . \tag{50}$$

Unter Beachtung der wegen (7) für alle Vektoren $\mathbf{a}$ gültigen Beziehung

$$\delta\boldsymbol{\omega}_p\cdot\mathbf{a} = (\delta\boldsymbol{\psi}_p\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{a} = \delta\boldsymbol{\psi}_p\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{a}) \tag{51}$$

liefert ein Vergleich der Randarbeiten zunächst

$$\mathbf{f} = \big(\mathbf{S} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{q}_p\big)\cdot\mathbf{e} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{e} + \big(\mathbf{q}_p\cdot\mathbf{e}\big)\,\mathbf{n}\,, \qquad \mathbf{m} = \mathbf{n}\times\mathbf{M}\cdot\mathbf{e}\ . \tag{52}$$

Die Schnittkraft $\mathbf{f}$ besitzt, wie man sieht, einen tangential zur Mittelfläche liegenden Anteil $\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}$, der im allgemeinen Komponenten senkrecht und parallel zum Rand, also Normalkräfte und Scherkräfte aufweist, sowie einen senkrecht zur Mittelfläche gerichteten Anteil $(\mathbf{q}_p\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{n}$, also eine Querkraft. Ist $\mathbf{e}$ eine Hauptrichtung des Scheibenkrafttensors $\mathbf{S}$, so ist die Scherkraft gleich Null.
Entsprechend besitzt das (stets tangential zur Mittelfläche wirkende) Schnittmoment $\mathbf{m}$ im allgemeinen Komponenten senkrecht und parallel zum Rand, also Torsionsmomente und Biegemomente. Ist $\mathbf{e}$ eine Hauptrichtung des Momententensors $\mathbf{M}$, so ist das Torsionsmoment gleich Null.
Ist die (zu $\mathbf{e}$ senkrechte) Schnittrichtung parallel zu $\mathbf{q}_p$, dann ist die Querkraft gleich Null.

Gleichgewichtsbedingungen

Ein Vergleich der flächenhaft geleisteten Arbeiten gibt

$$\overline{(\mathbf{S} + \acute{\mathbf{n}}\otimes\mathbf{q}_p)}\cdot\nabla_p = -\mathbf{p}\,, \tag{53}$$

$$\mathbf{n}\times\Big(\acute{\mathbf{M}}\cdot\nabla_p - \mathbf{q}_p\Big) = -\mathbf{m}_{\mathrm{A}}\ . \tag{54}$$

Diese beiden vektoriellen Differentialgleichungen beschreiben das lokale Kraft- bzw. Momentengleichgewicht. Sie entsprechen fünf skalaren Differentialgleichungen.

Mit den Identitäten

$$\overline{(\mathbf{n}\,\acute{\otimes}\,\mathbf{q}_p)}\cdot\nabla_p = (\acute{\mathbf{q}}_p\cdot\nabla_p)\,\mathbf{n} + \acute{\mathbf{n}}\otimes\nabla_p\cdot\mathbf{q}_p = (\acute{\mathbf{q}}_p\cdot\nabla_p)\,\mathbf{n} - \mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_p \tag{55}$$

und — man beachte $\mathbf{n}\cdot\mathbf{S} = 0$ —

$$\mathbf{n}\cdot\acute{\mathbf{S}}\cdot\nabla_p = \overline{\mathbf{n}\,\acute{\cdot}\,\mathbf{S}}\cdot\nabla_p - \mathbf{S}\cdot\cdot\nabla_p\otimes\acute{\mathbf{n}} = \mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{K} \tag{56}$$

sowie den Abkürzungen

$$\mathbf{p}_p = \mathbf{1}_p\cdot\mathbf{p}\,, \qquad p_n = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} \tag{57}$$

gelingt es, das Kraftgleichgewicht tangential zur Schalenmittelfläche durch die planare Komponente von (53) in der Form

$$\mathbf{1}_p \cdot \acute{\mathbf{S}} \cdot \nabla_p - \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_p = -\mathbf{p}_p \tag{58}$$

und das Kraftgleichgewicht senkrecht zur Schalenmittelfläche durch die Normalkomponente von (53) in der Form

$$\mathbf{S} \cdot\cdot \mathbf{K} + \mathbf{q}_p \cdot \nabla_p = -p_n \tag{59}$$

auszudrücken.

Die für alle Vektoren $\mathbf{a}$ gültige Identität

$$-\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{n}\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = -\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} = (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{1}_p \cdot \mathbf{a} \tag{60}$$

ermöglicht es, die Momentengleichgewichtsbedingung (54) in die Form

$$\mathbf{1}_p \cdot \acute{\mathbf{M}} \cdot \nabla_p - \mathbf{q}_p = \mathbf{n} \times \mathbf{m}_\mathrm{A} \tag{61}$$

zu bringen.

Der Sonderfall der ebenen Flächentragwerke

Bei ebenen Flächentragwerken ergeben sich wesentliche Vereinfachungen, denn der Tensor $\mathbf{K}$ ist gleich Null und der Vektor $\mathbf{n}$ sowie der Tensor $\mathbf{1}_p = \mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ sind konstant.

Die Grundverformungen gemäß (19), (20), (21) vereinfachen sich daher unter Beachtung von (25) und (26) zu

$$\mathbf{E}_\mathrm{M} = \mathrm{sym}\big(\bar{\mathbf{u}}_p \otimes \nabla_p\big)\,, \tag{62}$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{sym}\big(\boldsymbol{\omega}_p \otimes \nabla_p\big) \tag{63}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla_p w + \boldsymbol{\omega}_p\;. \tag{64}$$

Die Kraftgleichgewichtsbedingungen (58) und (59) sowie die Momentengleichgewichtsbedingung (61) nehmen die Form

$$\mathbf{S} \cdot \nabla_p = -\mathbf{p}_p\,, \tag{65}$$

$$\mathbf{q}_p \cdot \nabla_p = -p_n\,, \tag{66}$$

$$\mathbf{M} \cdot \nabla_p - \mathbf{q}_p = \mathbf{n} \times \mathbf{m}_\mathrm{A} \tag{67}$$

an. Diese Feldgleichungen erlauben nun eine Entkoppelung in ein Scheibenproblem und ein Plattenproblem.

Als *Scheibe* bezeichnet man ein ebenes Flächentragwerk, das nur Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}_p$ in seiner Ebene, aber keine Verschiebungen w senkrecht zur Ebene sowie keine durch $\boldsymbol{\omega}_p$ beschriebene Normalendrehung aufweist. Wegen $\mathbf{E}_\mathrm{M} \neq 0$, aber $\mathbf{B} = 0$ und $\boldsymbol{\gamma} = 0$ gibt es nach (43), (44), (45) zwar Scheibenkräfte $\mathbf{S}$, aber keine Momente $\mathbf{M}$ und keine Querkräfte $\mathbf{q}_p$. Flächenbelastungen $\mathbf{p}_p$ in der Scheibenebene sind also zulässig, nicht jedoch eine flächennormale Belastung p_n oder ein Schüttmoment $\mathbf{m}_\mathrm{A}$.

Als *Platte* bezeichnet man ein ebenes Flächentragwerk, das nur Verschiebungen w senkrecht zur Ebene sowie eine durch $\boldsymbol{\omega}_p$ beschriebene Normalendrehung, jedoch keine Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}_p$ in seiner Ebene aufweist. Wegen $\mathbf{E}_\mathrm{M} = 0$, aber $\mathbf{B} \neq 0$ und $\boldsymbol{\gamma} \neq 0$ gibt es nach (43), (44), (45), Momente $\mathbf{M}$ und Querkräfte $\mathbf{q}_p$, aber keine Scheibenkräfte $\mathbf{S}$. Eine flächennormale Belastung p_n und ein Schüttmoment $\mathbf{m}_\mathrm{A}$ sind also zulässig, nicht jedoch Flächenbelastungen $\mathbf{p}_p$ in der Scheibenebene.

Schubstarre Flächentragwerke

Die bisher betrachteten schubweichen Flächentragwerke werden — jedenfalls im ebenen Falle — nach *Mindlin* benannt. Vernachlässigt man die zu den Querkräften gehörigen Schubverformungen $\boldsymbol{\gamma}$, d.h. nimmt man an, dass die Flächennormale auch nach der Verformung auf der verformten Mittelfläche senkrecht steht — das entspricht der Bernoullischen Hypothese in der Balkentheorie — so wird ein solches Flächentragwerk mit dem Namen *Kirchhoff* in Verbindung gebracht.

Die Kirchhoffsche Hypothese bedeutet nach (26) bei Schalen

$$\boldsymbol{\omega}_p = -\nabla_p w - \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}}_p \tag{68}$$

und bei Platten

$$\boldsymbol{\omega}_p = -\nabla_p w \; . \tag{69}$$

Zu ermitteln sind dann nicht mehr 5 skalare Funktionen von $\mathbf{r}_\mathrm{M}$, sondern nur noch 3, nämlich u_1, u_2, w. Die Gleichung (45) ist nicht mehr anwendbar, doch können die Querkräfte — die nunmehr innere Reaktionskräfte darstellen — aus (61) berechnet werden.
Bei Anwendung auf eine Zylinderschale entstehen die Gleichungen von Donnell.

Anmerkung zu dickeren Schalen

Wenn die Schalen nicht sehr dünn sind, kann $z\mathbf{K}$ nicht mehr gegen $\mathbf{1}$ vernachlässigt werden. Die Formeln werden dann aufwendiger, der Membrankrafttensor $\mathbf{S}$ und der Momententensor $\mathbf{M}$ bleiben nicht symmetrisch, und in den Gleichgewichtsbedingungen treten Zusatzterme auf. Bei Anwendung auf eine Zylinderschale entstehen die Gleichungen von Flügge (1932).

Bezüglich der Einzelheiten sei auf die Literatur verwiesen:

Girkmann, K.; Flächentragwerke, Springer Wien
Flügge, W.; Stresses in Shells, Springer Berlin
Flügge, W.; Statik und Dynamik der Schalen, Springer Berlin
Göldner, W.; Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 1 und 2, Fachbuchverlag Leipzig
Wlassow, W.S.; Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik, Berlin

Skizze eines Schalenelements

Es bedeuten α und β zwei orthogonale Koordinatenlinien auf der Schalenmittelfläche. Dargestellt sind die Komponenten des Scheibenkrafttensors $\mathbf{S}$ (hier mit $\mathbf{T}$ bezeichnet), die Querkräfte sowie die Komponenten des Momententensors $\mathbf{M}$ und die der Flächenbelastung $\mathbf{p}$ und der Schüttmomente.

Begleitblatt **Z** zur Vorlesung **Höhere Festigkeitslehre**
TFH Berlin, FB VIII, Prof. Dr.-Ing. A. Krawietz

Zylinderschalen

Eingeführt werden auf der Fläche die Koordinaten z in Richtung der Mantellinien und ϕ in Umfangsrichtung, die sich als Beschränkung des räumlichen Zylinderkoordinatensystems r, ϕ, z auf die Fläche mit dem Radius $r = a$ deuten lassen. Als Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ wird $-\mathbf{e}_r$ gewählt.

Nach (F5) ist der Vektor der Mittelflächenverschiebung darzustellen als

$$\bar{\mathbf{u}} = u_z(z,\phi)\,\mathbf{e}_z + u_\phi(z,\phi)\,\mathbf{e}_\phi + w(z,\phi)\,\mathbf{n}\,, \tag{1}$$

und der zur Beschreibung der Normalendrehung gemäß (F7) verwendete Vektor als

$$\boldsymbol{\omega}_p = \boldsymbol{\psi}_p \times \mathbf{n} = \omega_z(z,\phi)\,\mathbf{e}_z + \omega_\phi(z,\phi)\,\mathbf{e}_\phi\ . \tag{2}$$

Daraus ergeben sich nach (F25) die Mittelflächenverzerrung zu

$$\mathbf{E}_\mathrm{M} = \mathrm{sym}\big(\mathbf{1}_p \cdot \acute{\bar{\mathbf{u}}}_p \otimes \nabla_p\big) - w\mathbf{K} \tag{3}$$

mit den Komponenten

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial z} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{a\partial\phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{a\partial\phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_\phi}{a\partial\phi} - \underline{\frac{w}{a}} \end{pmatrix} \tag{4}$$

und nach (F20) die Biegeverzerrung zu

$$\mathbf{B} = \mathrm{sym}\big(\mathbf{1}_p \cdot \acute{\boldsymbol{\omega}}_p \otimes \nabla_p\big) \tag{5}$$

mit den Komponenten

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_z}{\partial z} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_z}{a\partial\phi} + \frac{\partial \omega_\phi}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_z}{a\partial\phi} + \frac{\partial \omega_\phi}{\partial z}\right) & \frac{\partial \omega_\phi}{a\partial\phi} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Wenn die Gültigkeit der Kirchhoffschen Hypothese angenommen wird, so bedeutet das nach (F68)

$$\boldsymbol{\omega}_p = -\nabla_p w - \mathbf{K}\cdot\bar{\mathbf{u}}_p\,, \tag{7}$$

also die Komponentengleichungen

$$\omega_z = -\frac{\partial w}{\partial z}\,, \qquad \omega_\phi = -\frac{\partial w}{a\partial\phi} - \underline{\frac{u_\phi}{a}}\ . \tag{8}$$

Die Gleichgewichtsbedingung (F53) der Kräfte

$$(\mathbf{S} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{q}_p)\cdot\nabla_p = -\mathbf{p}\,, \tag{9}$$

besitzt die drei Komponenten

$$z: \qquad \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial s_{z\phi}}{a\partial\phi} = -p_z \tag{10}$$

$$\phi: \qquad \frac{\partial s_{z\phi}}{\partial z} + \frac{\partial s_{\phi\phi}}{a\partial\phi} - \underline{\frac{q_\phi}{a}} = -p_\phi \tag{11}$$

$$n: \qquad \underline{\frac{s_{\phi\phi}}{a}} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \frac{\partial q_\phi}{a\partial\phi} = -p_n \tag{12}$$

und die Gleichgewichtsbedingung (F61) der Momente — wenn es keine Flächenmomente gibt, also $\mathbf{m}_{\mathrm{A}} = 0$ gilt —

$$\mathbf{1}_p \cdot \acute{\mathbf{M}} \cdot \nabla_p = \mathbf{q}_p \tag{13}$$

die zwei Komponenten

$$z: \qquad \frac{\partial m_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial m_{z\phi}}{a\partial\phi} = q_z \tag{14}$$

$$\phi: \qquad \frac{\partial m_{z\phi}}{\partial z} + \frac{\partial m_{\phi\phi}}{a\partial\phi} = q_\phi\ . \tag{15}$$

Die unterstrichenen Zusatzterme in den Gleichungen (4), (8), (11) und (12) sind die Ursache dafür, dass die Problembeschreibung der (gekrümmten) Zylinderschale nicht wie die eines ebenen Flächentragwerks in unabhängige Platten- und Scheibenprobleme zerfällt.

Die Membrantheorie der Schalen

Unter gewissen Umständen lässt das Tragverhalten von Schalen sich hinreichend genau erfassen, wenn man von der Existenz von Biege- und Torsionsmomenten absieht. Nach (13) gibt es dann auch keine Querkräfte, und die Kraft-Gleichgewichtsbedingung (9) vereinfacht sich folglich zu

$$\mathbf{S} \cdot \nabla_p = -\mathbf{p}\ . \tag{16}$$

Als einzige Schnittgrößen in der Schale verbleiben also die Membrankräfte **S**. Man spricht daher von einem Membranspannungszustand, weil ein solcher auch von einer biegeschlaffen Membran abgetragen werden kann. (Letzteres setzt allerdings voraus, dass die Hauptmembrankräfte positiv, also Zugkräfte sind, um Faltenbildung auszuschließen.) Durch Membrankräfte wird das Material gleichmäßig über die Dicke beansprucht, während bei Biegung und Torsion nur die Randschichten ausgenutzt werden, was bei Schalen aus homogenem Material nicht wirtschaftlich ist.

Die Membranlösung der Zylinderschale

Der Ersatz der Gleichung (9) durch (16) bedeutet für die Zylinderschale, dass die Komponentengleichungen (10) bis (12) sich vereinfachen zu

$$z: \qquad \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial s_{z\phi}}{a\partial\phi} = -p_z \tag{17}$$

$$\phi: \qquad \frac{\partial s_{z\phi}}{\partial z} + \frac{\partial s_{\phi\phi}}{a\partial\phi} = -p_\phi \tag{18}$$

$$n: \qquad \frac{s_{\phi\phi}}{a} = -p_n \tag{19}$$

Diese drei skalaren Kraftgleichgewichtsbedingungen lassen sich nach den unbekannten Komponenten des Membranspannungstensors auflösen. Gleichung (19) liefert unmittelbar

$$s_{\phi\phi} = -a\, p_n \; . \tag{20}$$

Damit wird aus Gleichung (18)

$$\frac{\partial s_{z\phi}}{\partial z} = -p_\phi - \frac{\partial s_{\phi\phi}}{a\partial\phi} = -p_\phi + \frac{\partial p_n}{\partial\phi} \, , \tag{21}$$

und Integration gibt

$$s_{z\phi} = \int \Big(-p_\phi + \frac{\partial p_n}{\partial\phi} \Big) dz + f_1(\phi) \; . \tag{22}$$

Einsetzen in (17) führt auf

$$\frac{\partial s_{zz}}{\partial z} = -p_z - \frac{\partial s_{z\phi}}{a\partial\phi} = -p_z - \frac{1}{a}\int \Big(-\frac{\partial p_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial\phi^2} \Big) dz - \frac{1}{a} f_1'(\phi) \tag{23}$$

mit dem Integral

$$s_{zz} = -\int p_z \, dz - \frac{1}{a}\int\int \Big(-\frac{\partial p_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial\phi^2} \Big) dz\, dz - \frac{1}{a} f_1'(\phi)\, z + f_2(\phi) \; . \tag{24}$$

Da die Gleichgewichtsbedingungen sich als ausreichend erwiesen haben, um die inneren Kräfte zu berechnen, ist das **Membranproblem statisch bestimmt.**

Dass die Membranlösung an Grenzen stoßen kann, sieht man so. Zu den soeben berechneten Membrankräften $\mathbf{S}$ gehört eine Mittelflächenverzerrung $\mathbf{E}_\mathrm{M}$. Bei isotrop-elastischem Verhalten berechnet sie sich aus der Inversion von (F43) zu

$$\mathbf{E}_\mathrm{M} = \frac{1}{2Gh}\left(\mathbf{S} - \frac{\nu}{1+\nu}(\mathrm{tr}\mathbf{S})\mathbf{1}_p \right) \; . \tag{25}$$

Gleichsetzen der Komponenten dieses Tensors mit denen der Matrix (4) liefert nach Integration die Verschiebungskomponenten u_z, u_ϕ, w. Dabei können nun zwei Arten von Problemen auftreten. An Stellen konzentrierter oder unstetiger Belastungen werden die berechneten Normalverschiebungen w nicht die erforderlichen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen und an Rändern werden sie im allgemeinen nicht den Randvorgaben genügen. In beiden Fällen müssen also zusätzliche Verformungen aufgrund von Momenten überlagert werden, die allerdings oft den Charakter örtlich begrenzter Störungen besitzen.

Eine weitere Ungereimtheit der Membrantheorie kann offenbar werden, wenn die nach (5) mit (7) zu den Normalverschiebungen w berechnete Biegeverzerrung $\mathbf{B}$ nicht gleich Null ist, denn dann muss es nach (F44) zwangsläufig Momente $\mathbf{M}$ und nach (13) auch Querkräfte $\mathbf{q}_p$ geben.

Bei vielen Anwendungen wird allerdings das Tragverhalten weiter Gebiete der Schale durch die Membrantheorie recht gut wiedergegeben, so dass die Biegetheorie nur für Korrekturen benötigt wird.