PROF. DR.-ING. ARNOLD KRAWIETZ

Anisotropes elastisch-plastisches Verhalten
mit plastischer Volumenkonstanz bei kleinen
elastischen und großen plastischen Verzerrungen

Teil III: Die Exponentialfunktion eines
symmetrischen Deviators und ihre Ableitung

Berlin, den 6. Dezember 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Numerik des Deviators $\mathbf{V}$	2
1.1	Eigenwerte von $\mathbf{V}$	2
1.2	Darstellung der Tensorexponentialfunktion	3
1.3	Darstellung der Ableitung der Tensorexponentialfunktion . . .	5
2	Beiträge zur Symmetrieuntersuchung	8

Kapitel 1

Numerik des Deviators $\mathbf{V}$

1.1 Eigenwerte von $\mathbf{V}$

Im Teil I wird gezeigt, dass bei der numerischen Integration elastisch-plastischer Stoffgleichungen die plastische Volumenkonstanz durch Einführung der Exponentialfunktion eines symmetrischen Deviators $\mathbf{V}$ sicher gestellt werden kann. Beim Newton-Verfahren benötigt man dann auch die Ableitung dieser tensoriellen Exponentialfunktion. Um diese Funktionen exakt bilden zu können, ist die Kenntnis der Eigenwerte von $\mathbf{V}$ erforderlich. Sie sind gleich den drei reellen Wurzeln v der charakteristischen Gleichung

$$v^3 - Iv^2 + IIv - III = 0 \quad (1.1)$$

die sich, da $\mathbf{V}$ ein Deviator ist, reduziert auf

$$v^3 = \frac{1}{2}\mathbf{V} : \mathbf{V}v + \det \mathbf{V} \quad (1.2)$$

Das beigefügte Bild zeigt die graphische Lösung dieser Gleichung für den Fall $\det \mathbf{V} > 0$. Den Fall $\det \mathbf{V} \leq 0$ erhalten wir, indem wir das Diagramm auf den Kopf stellen.

Betrachten wir den ersten dieser beiden Fälle. Es gibt genau eine positive Wurzel v_a (die folglich keine Doppelwurzel sein kann). Hat man sie ermittelt, dann ergeben die beiden negativen Wurzeln — wegen $v_a + v_b + v_c = 0$ — sich zu

$$v_{b,c} = -\frac{v_a}{2} \pm w \quad (1.3)$$

Es muss aber gelten

$$\mathbf{V} : \mathbf{V} = v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 = 2 \left(\frac{3}{4}v_a^2 + w^2 \right) \quad (1.4)$$

so dass w sich berechnet aus

$$w = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{V} : \mathbf{V} - \frac{3}{4}v_a^2} \quad (1.5)$$

Bemerkung: Den Fall der dreifachen Wurzel, die bei einem Deviator nur gleich Null sein kann, können wir aus der Betrachtung ausschließen, denn bei plastischer Verformung muss $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$ sein.

Für den Eigenwert v_a gilt die Einschränkung

$$\sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{V} : \mathbf{V}} < v_a \leq \sqrt{\frac{2}{3}\mathbf{V} : \mathbf{V}} \quad (1.6)$$

Die untere Schranke wird im Falle $\det \mathbf{V} = \mathbf{0}$ erreicht. Den maximal möglichen Wert nimmt v_a gemäß (1.4) im Falle $w = 0$ an. Startet man eine Newton-Iteration der Gleichung (13.2) beispielsweise bei dem Mittelwert

$$v_{\text{init}} = 0.76 \sqrt{\mathbf{V} : \mathbf{V}} \quad (1.7)$$

zwischen beiden Schranken, so wird der positive Eigenwert v_a rasch und mit Sicherheit gefunden, und die beiden anderen Eigenwerte ergeben sich aus Gleichung (1.3) mit (1.5). Im Falle $\det \mathbf{V} \leq \mathbf{0}$ kehrt man das Vorzeichen des Startwerts der Newton-Iteration um und erhält den einzelnen negativen Eigenwert v_a . Die beiden anderen (gegebenenfalls zusammenfallenden) Eigenwerte v_b und v_c sind dann nicht negativ.

1.2 Darstellung der Tensorexponentialfunktion

Nehmen wir zunächst an, $\mathbf{V}$ besitze drei verschiedene Eigenwerte. Dann existiert eine Spektraldarstellung

$$\mathbf{V} = \sum_{j=a,b,c} v_j \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \quad (1.8)$$

in der die drei normierten Eigenvektoren $\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_c$ bis auf das Vorzeichen eindeutig festliegen. Man erhält sie aus der Lösung der Eigenwertaufgabe

$$(\mathbf{V} - v_j \mathbf{1}) \cdot \mathbf{e}_j = 0 \quad (1.9)$$

beziehungsweise die — eindeutigen — Projektoren $\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j$ aus

$$\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j = \frac{(\mathbf{V} - v_{j+1} \mathbf{1}) \cdot (\mathbf{V} - v_{j+2} \mathbf{1})}{(v_j - v_{j+1})(v_j - v_{j+2})} \quad (1.10)$$

(Die Eigenwerte seien zyklisch numeriert gedacht.) Sind $\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a$ und $\mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_b$ ermittelt, so lässt $\mathbf{e}_c \otimes \mathbf{e}_c$ sich gewinnen aus der Identität

$$\mathbf{e}_c \otimes \mathbf{e}_c = \mathbf{1} - \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_b \quad (1.11)$$

Die Exponentialfunktion des symmetrischen Tensors $\mathbf{V}$ ist definiert durch ihre Spektraldarstellung

$$\mathbf{e}^{\mathbf{V}} = \sum_{j=a,b,c} e^{v_j} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \quad (1.12)$$

und lässt sich berechnen, nachdem die Eigenwerte und Projektoren bekannt sind.

Nun zum Sonderfall des doppelten Eigenwerts $v_b = v_c$. (Wir wissen ja bereits, dass v_a kein doppelter Eigenwert sein kann.) Die Eigenvektoren $\mathbf{e}_b$ und $\mathbf{e}_c$ liegen nicht mehr eindeutig fest und müssen daher aus der Darstellung eliminiert werden. Dazu formen wir Gleichung (1.12) um gemäß

$$\mathbf{e}^{\mathbf{V}} = \underline{e^{v_c} \mathbf{1}} + (e^{v_a} - e^{v_c}) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a + \underbrace{(e^{v_b} - e^{v_c})}_{=0} \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_b \quad (1.13)$$

Beim Grenzübergang geht der unterklammerte Term nach Null und der dann nicht mehr eindeutige Projektor $\mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_b$ wird nicht benötigt. Es verbleibt die unterstrichene Berechnungsvorschrift.

Um die beschriebene Fallunterscheidung zu vermeiden, können wir einführen

$$\mathbf{B} = \frac{(\mathbf{V} - v_a \mathbf{1}) \cdot (\mathbf{V} - v_c \mathbf{1})}{v_b - v_a} \quad (1.14)$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{e}^{\mathbf{V}} = e^{v_c} \left(\mathbf{1} + (e^{v_a - v_c} - 1) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a + \frac{e^{v_b - v_c} - 1}{v_b - v_c} \mathbf{B} \right) \quad (1.15)$$

Der Tensor $\mathbf{B}$ geht beim Grenzübergang nach Null und der Bruch gegen den Wert 1. Falls allerdings $v_b \approx v_c$, dann kann die Auswertung des Bruches etwas Falsches liefern, und falls exakt $v_b = v_c$ gilt, dann ergibt sich der unbestimmte Ausdruck $0/0$. Um die Auswertung der Vorschrift (1.15) auch bei nahezu gleichen Eigenwerten v_b und v_c problemlos zu gestalten und ohne jede Fallunterscheidung auszukommen, kann man den Bruch ersetzen durch

$$\frac{e^{v_b - v_c} - 1}{v_b - v_c} \longrightarrow \frac{e^{v_b - v_c} - 1 + \text{sign}(\varepsilon, v_b - v_c)}{v_b - v_c + \text{sign}(\varepsilon, v_b - v_c)} \quad (1.16)$$

Darin bedeutet ε eine kleine positive Konstante, und sign ist die FORTRAN-Funktion, welche den Wert $+\varepsilon$ liefert für $v_b - v_c \geq 0$ und den Wert $-\varepsilon$ für $v_b - v_c < 0$.

1.3 Darstellung der Ableitung der Tensor-exponentialfunktion

Zunächst nehmen wir wieder an, $\mathbf{V}$ besitze drei verschiedene Eigenwerte. Dann gilt für die Ableitung der Eigenvektoren

$$\dot{\mathbf{e}}_j = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (1.17)$$

worin $\boldsymbol{\Omega}$ einen antimetrischen Tensor bedeutet. Die Ableitung der Projektoren stellt sich folglich dar als

$$(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j)^\bullet = \dot{\mathbf{e}}_j \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \dot{\mathbf{e}}_j = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (1.18)$$

und die Ableitung des Tensors $\mathbf{V}$ als

$$\dot{\mathbf{V}} = \sum_{j=a,b,c} \dot{v}_j \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (1.19)$$

Komponentenweise ergibt sich

$$\mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_j = \dot{v}_j \quad (1.20)$$

$$\mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_{j+1} = (v_{j+1} - v_j) \mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_{j+1} \quad (1.21)$$

Daraus gewinnt man für $\boldsymbol{\Omega}$ die Darstellung

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{j=a,b,c} \frac{\mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_{j+1}}{v_{j+1} - v_j} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_{j+1} - \mathbf{e}_{j+1} \otimes \mathbf{e}_j) \quad (1.22)$$

Mit diesen Ergebnissen finden wir für die Ableitung der Tensor-exponentialfunktion (1.12)

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}^{\mathbf{V}})^\bullet &= \sum_{j=a,b,c} e^{v_j} \dot{v}_j \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{V}} - \mathbf{e}^{\mathbf{V}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \\ &= \sum_{j=a,b,c} \left(e^{v_j} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{v_{j+1}} - e^{v_j}}{v_{j+1} - v_j} 2 \text{sym}[\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_{j+1} \otimes \mathbf{e}_{j+1}] \right) \quad (1.23) \end{aligned}$$

Nun müssen wir wieder den Sonderfall des doppelten Eigenwerts $v_b = v_c$ daraus durch Grenzübergang ermitteln. Dazu formen wir die letzte Gleichung

folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
(e^{\mathbf{V}})^{\bullet} &= \underline{e^{v_a} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a} \\
&+ \underline{e^{v_c} (\mathbf{1} - \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a) \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a)} \\
&+ \frac{e^{v_a} - e^{v_c}}{v_a - v_c} 2 \operatorname{sym}[(\mathbf{1} - \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a) \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a] \\
&+ \left(e^{v_b} + e^{v_c} - 2 \frac{e^{v_c} - e^{v_b}}{v_c - v_b} \right) \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_b \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_b \\
&+ \left(\frac{e^{v_c} - e^{v_b}}{v_c - v_b} - e^{v_c} \right) 2 \operatorname{sym}[(\mathbf{1} - \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a) \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_b] \\
&+ \left(\frac{e^{v_a} - e^{v_b}}{v_a - v_b} - \frac{e^{v_a} - e^{v_c}}{v_a - v_c} \right) 2 \operatorname{sym}[\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_b] \quad (1.24)
\end{aligned}$$

Beim Grenzübergang gehen die unterklammerten Terme nach Null, und der dann nicht mehr eindeutige Projektor $\mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_b$ wird nicht benötigt. Es verbleibt die unterstrichene Berechnungsvorschrift.

Wieder wollen wir die Fallunterscheidung vermeiden und schreiben die Vorschrift daher um in die Form

$$\begin{aligned}
(e^{\mathbf{V}})^{\bullet} &= e^{v_c} \left(e^{v_a - v_c} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a \right. \\
&+ (\mathbf{1} - \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a) \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a) \\
&+ \frac{e^{v_a - v_c} - 1}{v_a - v_c} 2 \operatorname{sym}[(\mathbf{1} - \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a) \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a] \\
&+ \underbrace{\frac{(v_b - v_c - 2) e^{v_b - v_c} + v_b - v_c + 2}{(v_b - v_c)^3} \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{B}} \\
&+ \underbrace{\frac{e^{v_b - v_c} - 1 - (v_b - v_c)}{(v_b - v_c)^2} 2 \operatorname{sym}[(\mathbf{1} - \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a) \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{B}]} \\
&+ \frac{1}{v_a - v_b} \left(\frac{e^{v_a - v_c} - 1}{v_a - v_c} - \underbrace{\frac{e^{v_b - v_c} - 1}{v_b - v_c}} \right) 2 \operatorname{sym}[\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{B}] \left. \right) \quad (1.25)
\end{aligned}$$

Der letzte unterklammerte Bruch wird wieder gemäß der Vorschrift (1.16) ersetzt. Den vorletzten ersetzen wir wie folgt:

$$\frac{e^{v_b - v_c} - 1 - (v_b - v_c)}{(v_b - v_c)^2} \longrightarrow \frac{e^{v_b - v_c} - 1 - (v_b - v_c) + \varepsilon}{(v_b - v_c)^2 + 2\varepsilon} \quad (1.26)$$

so dass im Grenzfall $v_b = v_c$ der korrekte Grenzwert $1/2$ als Funktionswert geliefert wird. Entsprechend ersetzen wir den drittletzten nach der Vorschrift

$$\frac{(v_b - v_c - 2)e^{v_b - v_c} + v_b - v_c + 2}{(v_b - v_c)^3} \longrightarrow \frac{(v_b - v_c - 2)e^{v_b - v_c} + v_b - v_c + 2 + \text{sign}(\varepsilon, v_b - v_c)}{(v_b - v_c)^3 + 6\text{sign}(\varepsilon, v_b - v_c)} \quad (1.27)$$

Die Darstellung (1.25) zeigt, dass $(e^{\mathbf{V}})^{\bullet}$ eine lineare Funktion in $\dot{\mathbf{V}}$ ist, die man deswegen auch schreibt als

$$(e^{\mathbf{V}})^{\bullet} = \frac{\partial e^{\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{V}} : \dot{\mathbf{V}} \quad (1.28)$$

Kapitel 2

Beiträge zur Symmetrieuntersuchung

Gemäß Teil II sind die algorithmische Steifigkeit und die Tetrade $\mathcal{A}$ im Falle der Isotropie symmetrisch, wenn die dortigen beiden Ausdrücke (3.21) und (3.22), also

$$\text{sym}\left[\mathbf{e}^{\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{V}} : \delta \mathbf{X}\right] : \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} : \delta^* \mathbf{X} \quad (2.1)$$

und

$$\text{sym}\left[\mathbf{e}^{\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{V}} : \delta \mathbf{X}\right] : (\mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) : \delta^* \mathbf{X} \quad (2.2)$$

sich unter Vertauschung der symmetrischen Deviatoren $\delta^* \mathbf{X}$ und $\delta \mathbf{X}$ als invariant erweisen.

Um das zu beurteilen, können wir annehmen, die drei Eigenwerte von $\mathbf{V}$ seien voneinander verschieden. (Wenn wir in diesem Falle Symmetrie konstatieren, dann kann diese beim Grenzübergang zum Fall des doppelten Eigenwerts nicht verlorengehen.) Wir gehen also aus von Gleichung (1.23) und beschaffen uns mit einem symmetrischen Tensor $\mathbf{Y}$ zunächst den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} : \mathbf{e}^{-\mathbf{V}} \cdot (\mathbf{e}^{\mathbf{V}})^{\bullet} &= \mathbf{Y} : \mathbf{e}^{-\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^{\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{V}} : \dot{\mathbf{V}} \\ &= \sum_{j=a,b,c} \left(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{e}_j \quad \mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_j + \frac{2 \sinh(v_{j+1} - v_j)}{v_{j+1} - v_j} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{e}_{j+1} \quad \mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_{j+1} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Wenn wir für $\mathbf{Y}$ den Deviator $\delta^* \mathbf{X}$ und für $\dot{\mathbf{V}}$ den Deviator $\delta \mathbf{X}$ wählen sowie $\mathbf{V}$ durch $-\mathbf{V}$ ersetzen, wird die Invarianz des Ausdrucks (2.2) gegen Vertauschung offenbar.

Als nächstes wählen wir für $\mathbf{Y}$ den Tensor $\mathbf{V}$ und finden

$$\mathbf{V} : \mathbf{e}^{-\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^{\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{V}} : \dot{\mathbf{V}} = \sum_{j=a,b,c} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_j \quad \mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{V} : \dot{\mathbf{V}} \quad (2.4)$$

Daraus sehen wir — wiederum nach Ersatz von $\mathbf{V}$ durch $-\mathbf{V}$ — sofort, dass der Ausdruck (2.1) sich schreiben lässt in der gegen Vertauschung von $\delta^*\mathbf{X}$ und $\delta\mathbf{X}$ invarianten Form

$$\text{sym}\left[\mathbf{e}^{\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{V}} : \delta\mathbf{X}\right] : \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} : \delta^*\mathbf{X} = -\mathbf{V} : \delta\mathbf{X} \quad \mathbf{V} : \delta^*\mathbf{X} \quad (2.5)$$

Wir konnten also tatsächlich zeigen, dass bei den in Teil I und II behandelten Stoffgleichungen im Sonderfall der elastischen und plastischen Isotropie sowohl die bei der Berechnung des Deviators $\mathbf{V}$ benötigte Tetrade $\mathcal{A}$ als auch die algorithmische Steifigkeit symmetrisch sind, jedenfalls wenn man ihrer Berechnung die Annahme sehr kleiner elastischer Verzerrungen zu Grunde legt. Bei allgemein anisotropem Verhalten gehen diese Symmetrien jedoch verloren.