Prof. Dr.-Ing. Arnold Krawietz

Anisotropes elastisch-plastisches Verhalten mit plastischer Volumenkonstanz bei kleinen elastischen und großen plastischen Verzerrungen

Teil II: Zur Frage der Symmetrien der tangentialen Steifigkeiten

Berlin, den 6. Dezember 2004

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Symmetrien und Potentiale

1.1 Ziel der Untersuchung

Im vorliegenden Bericht geht es darum, zu untersuchen, ob die tangentialen Steifigkeiten — und zwar sowohl die infinitesimalen als auch die algorithmischen — bei elastisch-plastischem Material symmetrisch sind. Im ersten Kapitel werden verschiedene theoretische Konzepte diskutiert, die zur Begründung der Symmetrieeigenschaft vorgeschlagen worden sind. Das zweite Kapitel spezialisiert sodann auf jene Stoffgleichungen, die in Teil I vorgestellt wurden, und untersucht insbesondere den Einfluss von Termen, die wegen der Kleinheit der elastischen Verzerrungen gewöhnlich vernachlässigt werden, auf die infinitesimale Steifigkeit, während das dritte Kapitel sich mit der algorithmischen Steifigkeit beschäftigt, die bei endlicher Schrittweite für das Newton-Verfahren benötigt wird. Dabei zeigt sich, dass bei isotropem Verhalten die Symmetrie gewahrt wird, während sie bei anisotropem Verhalten verloren geht.

1.2 Geschichtliches

Die Symmetrie elastisch-plastischer Steifigkeiten ist, wie wir noch sehen werden, eng verknüpft mit dem Konzept der Konvexität der Fließfläche und der Normalität der Richtung des plastischen Verformungszuwachses zur Fließfläche, so dass die Fließbedingung zugleich als plastisches Potential fungiert und als Folge die Dissipationsleistung in gewissem Sinne maximal, Steifigkeiten symmetrisch und Randwertaufgaben für Geschwindigkeitsfelder selbstadjungiert werden. Man spricht dann auch von assoziativer Plastizität.
Schon von Mises hat in einem klassisch gewordenen Aufsatz [1] 1928 die Behauptung aufgestellt, die Existenz des plastischen Potentials sei (bei quadratischer Fließbedingung) durch Experimente an anisotropen Kristallen be-

wiesen. Drucker [2] fand 1951, dass gewisse Stabilitätsforderungen an elastisch-plastische Materialien (bei kleinen Verformungen) ebenfalls auf Konvexität und Normalität führen. Er wies allerdings darauf hin, dass es sich bei diesem Ergebnis nicht um ein Naturgesetz handelt, da es in der Natur neben stabilem auch instabiles Verhalten gibt.
Die Übertragung der genannten Konzepte auf beliebig große elastische und plastische Verformungen erfolgte in [3]. Die Ergebnisse dieser Untersuchung wurden später teilweise von anderen Autoren neu entdeckt ([4], [5]) .
Ein anderer Zugang zur Symmetrie basiert auf der linearen Thermodynamik der irreversiblen Prozesse. Auf der Grundlage von Argumenten aus der statistischen Mechanik hatte Onsager dort eine generelle Symmetrie postuliert. Ziegler übertrug diesen Gedanken ins Nichtlineare (siehe z.B [6]) und verschärfte den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik (Forderung positiver Dissipation) zum dritten Hauptsatz (Forderung maximaler Dissipation), allerdings auf der Grundlage klassischer Differenzierbarkeitsannahmen. Eine größere Klarheit und Reichweite der Konzepte erzielt man, wenn man die Differenzierbarkeit aufgibt und Subdifferentiale der Potentiale betrachtet. Das geschieht z.B. in den Arbeiten [7] und [8].
Bei Metallen hat sich die assoziative Plastizität bewährt, dagegen ist sie in der — von Coulombscher Reibung geprägten — Bodenmechanik nicht anwendbar.

1.3 Stabilitätstheoretischer Zugang

Wir wählen die zu untersuchenden Stoffgleichungen zunächst allgemeiner als in Teil I und lassen jetzt auch beliebig große elastische Verzerrungen und plastische Volumenänderungen zu. In einem solchen Fall, wo die Dichte der entspannten Zwischenplazierung nicht konstant ist, wird die Untersuchung wesentlich übersichtlicher, wenn man nicht mit Spannungen arbeitet, sondern mit Quotienten aus Spannungen und Dichten, die als Beanspruchungen bezeichnet werden sollen. Es sollen ϱ, ϱ_0, ϱ_Z die Massendichte in der aktuellen, der Bezugs- bzw. der Zwischenplatzierung bedeuten. Der Zusammenhang zwischen der auf die Bezugsplatzierung bezogenen 2. Piola-Kirchhoff-Spannung $\mathbf{S}$ und der zugehörigen Beanspruchung $\mathbf{Z}$ ist

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{S}}{\varrho_0} \tag{1.1}$$

der entsprechende Zusammenhang der 2. Piola-Kirchhoff-Tensoren, die auf die Zwischenplazierung bezogen sind,

$$\mathbf{Z}_e = \frac{\mathbf{S}_e}{\varrho_Z} \tag{1.2}$$

und ihre Verknüpfung mit der Cauchy'schen Spannung $\mathbf{T}$ ist gegeben durch

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{T}}{\varrho} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z}_e \cdot \mathbf{N}^T \tag{1.3}$$

Von der Materialbeschreibung benötigen wir ferner

$$\mathbf{E}_e = \tfrac{1}{2}(\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{1}) \tag{1.4}$$

$$\mathbf{Z}_e = \mathbf{Z}_e(\mathbf{E}_e) \tag{1.5}$$

$$-\,\mathbf{N}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{N}} = \mathbf{P} \tag{1.6}$$

$$\Phi(\mathbf{E}_e, \mathbf{Z}_{eB}, \kappa) \leq 0 \tag{1.7}$$

$\mathbf{C}$ ist der auf die Bezugsplatzierung bezogene rechte Cauchy-Green-Tensor, $\mathbf{E}_e$ bedeutet die (elastische) Green'sche Gitterverzerrung, $\mathbf{N}$ ist das Inverse des plastischen Anteils des Deformationsgradienten, $\mathbf{P}$ die plastische Verformungsänderung, κ ein skalarer Verfestigungsparameter, $\mathbf{Z}_{eB}$ der die kinematische Verfestigung kennzeichnende Rückbeanspruchungstensor und Φ die Fließfunktion, die den — mit der Verfestigung sich ändernden— elastischen Bereich im Raum der elastischen Verzerrungen $\mathbf{E}_e$ beschreibt. Die Entwicklungsgleichungen der Verfestigungsvariablen sind an dieser Stelle noch ohne Bedeutung und werden daher zunächst nicht spezifiziert.
Nimmt man an, dass die Speicherenergie W (je Masseneinheit) nur von den elastischen Verzerrungen abhängt, so lautet die Passivitätsforderung — siehe [3] — für das oben beschriebene Material

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,\mathbf{Z} : \dot{\mathbf{C}} &= \tfrac{1}{2}\,\mathbf{N} \cdot \mathbf{Z}_e \cdot \mathbf{N}^T : \left(\mathbf{N}^{-T} \cdot (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e) \cdot \mathbf{N}^{-1}\right)^{\bullet} \\ &= \mathbf{Z}_e : \dot{\mathbf{E}}_e - (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e) \cdot \mathbf{Z}_e : \mathbf{N}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{N}} \\ &\geq \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}_e} : \dot{\mathbf{E}}_e \end{aligned} \tag{1.8}$$

Beschränkung auf rein elastische Verformungen ($\dot{\mathbf{N}} = 0, \quad \dot{\mathbf{E}}_e$ beliebig) liefert die Potentialrelation

$$\mathbf{Z}_e = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}_e} \tag{1.9}$$

und es verbleibt die Dissipationsungleichung

$$D = (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e) \cdot \mathbf{Z}_e : (-\mathbf{N}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{N}}) \tag{1.10}$$

$$= \mathbf{\Sigma} : \mathbf{P} \geq 0 \tag{1.11}$$

Dabei ist zur Abkürzung der (i. Allg. unsymmetrische) Mandel'sche Beanspruchungstensor

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}(\mathbf{E}_e) := (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e) \cdot \mathbf{Z}_e(\mathbf{E}_e) \tag{1.12}$$

eingeführt worden.
Im Aufsatz [3] wurden für eine allgemeine Klasse von elastisch-plastischen Materialien die Konsequenzen der folgenden Forderung untersucht:

- Postulat D: Durch keinen Deformationskreisprozess soll dem Materialelement Arbeit entzogen werden können.

Die Bedeutung dieser Forderung im Rahmen eines allgemeinen Stabilitätskonzepts, d.h. die Übertragung der Druckerschen Ideen auf große elastische und plastische Verformungen, wird in [9], Kap. 12 dargelegt. Als Folge von Postulat D ergab sich:

1. Es gilt eine Bedingung der *Verallgemeinerten Konvexität*, welche gleichbedeutend ist mit der Tatsache, dass die Dissipationsleistung maximal ist. Das ist die Übertragung der von Mises'schen Idee. Für die oben beschriebene Materialklasse vereinfacht sich diese Bedingung zu — vgl. [3], Formel (4.13) —

$$\big(\mathbf{\Sigma}(\mathbf{E}_e) - \mathbf{\Sigma}(\mathbf{E}_e^*)\big) : \mathbf{P} \geq 0 \tag{1.13}$$

   Sie ist so zu lesen: Wird zur Berechnung der an der plastischen Verformungsänderung $\mathbf{P}$ geleisteten Dissipation der zugehörige Tensor $\mathbf{\Sigma}$ herangezogen, so ergibt sich ein größerer (oder jedenfalls kein kleinerer) Wert, als wenn irgendein anderer Tensor $\mathbf{\Sigma}^*$ aus dem elastischen Bereich verwendet wird.

2. Wählt man für $\mathbf{\Sigma}^*$ Nachbarpunkte von $\mathbf{\Sigma}$, dann findet man

$$-\,\mathbf{P} : \delta\mathbf{\Sigma} = -\mathbf{P} : \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}_e} : \delta\mathbf{E}_e \geq 0 \tag{1.14}$$

   Ist nun die Fließbedingung $\Phi(\mathbf{E}_e, \mathbf{Z}_{eB}, \kappa) = 0$ glatt, d.h. gilt für den augenblicklichen elastischen Bereich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}_e} : \delta\mathbf{E}_e \leq 0, \quad \text{wenn} \quad \Phi = 0 \tag{1.15}$$

   dann zeigt ein Vergleich

$$\mathbf{P} : \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}_e} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}_e} \quad \text{mit} \quad \lambda \geq 0 \tag{1.16}$$

   Es ist dies ein Spezialfall der in [3], Formeln (5.7), (5.8) beschriebenen Eigenschaft der *Verallgemeinerten Normalität.*

3. In [3] wurde ferner gezeigt, dass die Verallgemeinerte Normalität zusammen mit der Potentialbeziehung (1.9) hinreichend ist für die Symmetrie der infinitesimalen Tangentialsteifigkeit und damit für die Selbstadjungiertheit der infinitesimalen elastisch-plastischen Randwertaufgabe; dieser lässt sich also ein Variationsprinzip zuordnen. Für einen Spezialfall werden wir den Beweis der Symmetrie im nächsten Kapitel explizit durchführen.

Bei Beschränkung auf elastisch isotropes Verhalten wäre $\mathbf{Z}_e$ koaxial zu $\mathbf{E}_e$, also $\mathbf{\Sigma}$ gemäß (1.12) ein symmetrischer Tensor. Aus (1.13) wird dann die echte Konvexitätsbedingung — siehe [3], Formel (4.14) —

$$(\mathbf{\Sigma} - \mathbf{\Sigma}^*) : \mathrm{sym}\mathbf{P} \geq 0 \tag{1.17}$$

und aus (1.16) die echte Normalitätsbedingung – siehe [3], Formel (5.10) –

$$\mathrm{sym}\mathbf{P} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{\Sigma}} \tag{1.18}$$

(Wir betrachten in diesem Falle $\partial\mathbf{\Sigma}/\partial\mathbf{E}_e$ als invertierbare Abbildung auf der Menge der symmetrischen Tensoren.)
Über den antimetrischen Teil von $\mathbf{P}$ erhält man dann offenbar keine Aussage.

1.4 Konzept der Standard-Materialien

Halphen & Nguyen definieren in ihrer Arbeit [7] verallgemeinerte Standard-Materialien als solche, die normale Dissipation besitzen. Auf obige Stoffgleichungen eingeschränkt bedeutet ihre Definition:
Es existiert ein konvexes Potential $\varphi(\mathbf{\Sigma})$ so, dass $\mathbf{P}$ Subgradient, also Element des Subdifferentials von φ ist:

$$\mathbf{P} \in \partial\varphi(\mathbf{\Sigma}) \tag{1.19}$$

Das ist gleichbedeutend mit folgender Forderung — vgl. [8] —

$$\forall \mathbf{\Sigma}^* : \qquad (\mathbf{\Sigma}^* - \mathbf{\Sigma}) : \mathbf{P} + \varphi(\mathbf{\Sigma}) \leq \varphi(\mathbf{\Sigma}^*) \tag{1.20}$$

Im hier betrachteten geschwindigkeitsunabhängigen Fall wird für φ die Indikatorfunktion gewählt, d.h. $\varphi = 0$ im elastischen Bereich und $\varphi = \infty$ außerhalb des elastischen Bereiches. (Es ist also $\varphi(\mathbf{\Sigma}) = 0$. Nur wenn $\mathbf{\Sigma}^*$ im elastischen Bereich liegt — $\varphi(\mathbf{\Sigma}^*) = 0$ —, dann ergibt sich eine nichttriviale Aussage.)

Die Autoren haben bei ihrer Untersuchung allerdings eines übersehen: Der unsymmetrische Tensor $\mathbf{\Sigma}$ — in [7] mit $\Re$ bezeichnet — ist eine Funktion des symmetrischen Tensors $\mathbf{E}_e$, d.h. die zum elastischen Bereich gehörenden $\mathbf{\Sigma}$ bilden eine sechsdimensionale Mannigfaltigkeit im neundimensionalen Raum, also keine konvexe Menge. Man kann sich helfen, indem man den elastischen Bereich formal auf ein neundimensionales Gebiet ausdehnt, aber das hat keine physikalische Bedeutung. Auch Miehe&Stein ([5]) sind so vorgegangen und haben aus dieser willkürlichen Annahme Schlüsse auf das Verschwinden des plastischen Spins gezogen — die übrigens wegen tensorarithmetischer Unrichtigkeiten sogar falsch sind.

Wir können die Theorie der Standard-Materialien sauber formulieren, wenn wir auf den elastisch-isotropen Fall einschränken. Dann geht (1.20) in die Bedingung (1.17) der maximalen Dissipation über, wenn wir (1.20) nur auf dem sechsdimensionalen Raum der symmetrischen Tensoren betrachten und mit $\mathbf{P}$ hier und im Folgenden nur den symmetrischen Teil der plastischen Verformungsänderung bezeichnen. (Über den unsymmetrischen Teil können wir eine beliebige Annahme treffen.)

Natürlich ergibt sich für glatte Randpunkte des elastischen Bereichs wieder die Normalitätsregel (1.18), und die Fließfunktion fungiert als plastisches Potential (Punkt A im Bild). Damit ist zwar nicht $\mathbf{P}$, wohl aber die Richtung von $\mathbf{P}$ eine Funktion von $\mathbf{\Sigma}$. Man spricht dann von der Existenz einer Fließregel. An Ecken der Fließfläche ist nicht einmal die Richtung von $\mathbf{P}$ eindeutig festgelegt (Punkt B im Bild).

Eine Fenchel-Transformation (verallgemeinerte Legendre-Transformation) erlaubt es nun, ein weiteres Potential φ^* einzuführen und dieses als Dissipationsleistung D (je Masseneinheit) zu identifizieren. Dazu definiert man

$$\varphi^*(\mathbf{P}) := \sup_{\mathbf{\Sigma}^*}[\mathbf{\Sigma}^* : \mathbf{P} - \varphi(\mathbf{\Sigma}^*)] \tag{1.21}$$

Wenn $\mathbf{\Sigma}^*$ nicht im elastischen Bereich liegt, ist der Wert der eckigen Klammer gleich $-\infty$, anderenfalls lässt (1.21) sich schreiben als

$$\varphi^*(\mathbf{P}) := \max_{\mathbf{\Sigma}^*}[\mathbf{\Sigma}^* : \mathbf{P}] \tag{1.22}$$

Dass das Supremum hier ein Maximum ist, folgt aus (1.20) wegen

$$\mathbf{\Sigma}^* : \mathbf{P} = (\mathbf{\Sigma}^* - \mathbf{\Sigma}) : \mathbf{P} + \mathbf{\Sigma} : \mathbf{P} \leq \mathbf{\Sigma} : \mathbf{P} \tag{1.23}$$

denn das Gleichheitszeichen gilt für $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}^*$. Man erkennt, dass $\varphi^*(\mathbf{P})$ die — am symmetrischen Teil der plastischen Verformungsänderung $\mathbf{P}$ — geleistete Dissipation darstellt.

Man kann ferner zeigen, dass $\mathbf{\Sigma}$ Subgradient von φ^* ist, also

$$\mathbf{\Sigma} \in \partial\varphi^*(\mathbf{P}) \tag{1.24}$$

oder gleichbedeutend damit

$$\forall \mathbf{P}^* : \qquad (\mathbf{P}^* - \mathbf{P}) : \mathbf{\Sigma} + \varphi^*(\mathbf{P}) \leq \varphi^*(\mathbf{P}^*) \tag{1.25}$$

gelten muss. Wählt man nämlich $\mathbf{P}^* \in \partial\varphi(\mathbf{\Sigma})$, dann gilt nach (1.20)

$$\forall \mathbf{\Sigma}^\dagger : \qquad (\mathbf{\Sigma}^\dagger - \mathbf{\Sigma}) : \mathbf{P}^* \leq 0 \tag{1.26}$$

und damit

$$\mathbf{\Sigma} : \mathbf{P}^* = \max_{\mathbf{\Sigma}^\dagger}[\mathbf{\Sigma}^\dagger : \mathbf{P}^*] = \varphi^*(\mathbf{P}^*) \tag{1.27}$$

und es verbleibt von (1.25)

$$0 \leq \max_{\mathbf{\Sigma}^\dagger}[\mathbf{\Sigma}^\dagger : \mathbf{P}] - \mathbf{\Sigma} : \mathbf{P} = \varphi^*(\mathbf{P}) - \mathbf{\Sigma} : \mathbf{P} \leq 0 \tag{1.28}$$

also

$$\varphi^*(\mathbf{P}) = \mathbf{\Sigma} : \mathbf{P} \tag{1.29}$$

Folglich ist das Subdifferential $\partial\varphi^*(\mathbf{P})$ die Menge jener Tensoren $\mathbf{\Sigma}$, die im Doppelpunktprodukt mit $\mathbf{P}$ die Dissipationsleistung liefern. Ist die Fließbedingung in der Umgebung eines $\mathbf{\Sigma}$ konvex im strengen Sinne, dann enthält das Subdifferential nur einen Subgradienten, d.h. es gibt nur einen Tensor $\mathbf{\Sigma}$, und dieser lässt sich mittels der gewöhnlichen Ableitung von φ^* als Funktion von $\mathbf{P}$ darstellen:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}(\mathbf{P}) = \frac{\partial\varphi^*}{\partial\mathbf{P}}(\mathbf{P}) \tag{1.30}$$

Die Dissipationsleistung fungiert in diesem Falle als klassisches Potential (Punkt A im Bild). (Das ist übrigens der Ausgangspunkt des Vorgehens von Ziegler [6]). Ist die Fließbedingung lokal nur schwach konvex, dann ist $\mathbf{\Sigma}$ — im Gegensatz zur Dissipationsleistung — keine eindeutige Funktion von $\mathbf{P}$ (Bereich C bis D im Bild).

Bemerkung zum klassischen Vorgehen: Geht man von der Annahme aus, der symmetrische Tensor $\mathbf{\Sigma}$ sei eine Funktion des symmetrischen Tensors $\mathbf{P}$, dann ist die Dissipationsleistung ebenfalls eine Funktion von $\mathbf{P}$:

$$D = D(\mathbf{P}) := \mathbf{\Sigma}(\mathbf{P}) : \mathbf{P} \tag{1.31}$$

und daraus folgt

$$\frac{\partial D}{\partial\mathbf{P}} = \mathbf{\Sigma} + \mathbf{P} : \frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\mathbf{P}} \tag{1.32}$$

Die Dissipationsleistung fungiert folglich genau dann als Potential bei der Ermittlung von $\mathbf{\Sigma}$ (d.h., $\mathbf{\Sigma} = \partial D/\partial \mathbf{P}$), wenn gilt

$$\mathbf{P} : \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \mathbf{P}} = 0 \tag{1.33}$$

Nun ist aber beim geschwindigkeitsunabhängigen Material die Dissipationsleistung proportional zum Betrag von $\mathbf{P}$, also

$$D = \mathbf{\Sigma}(\vec{\mathbf{P}}, |\mathbf{P}|) : \vec{\mathbf{P}}|\mathbf{P}| \tag{1.34}$$

so dass $\mathbf{\Sigma}$ von $|\mathbf{P}|$ unabhängig sein muss. Da aber die Richtungen $\vec{\mathbf{P}}$ eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit bilden, ist auch die Menge der $\mathbf{\Sigma}$ eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit im sechsdimensionalen Raum der symmetrischen Tensoren, und diese Mannigfaltigkeit nennt man die Fließfläche $\Phi = 0$. Ist diese glatt, so gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{\Sigma}} : \delta \mathbf{\Sigma} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{\Sigma}} : \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \mathbf{P}} : \delta \mathbf{P} = 0 \tag{1.35}$$

und der Vergleich mit (1.33) zeigt

$$\mathbf{P} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{\Sigma}}, \quad \lambda \text{ reell}, \tag{1.36}$$

also wieder die Normalitätsregel.
Wenn die Menge der $\mathbf{P}$ einer Nebenbedingung unterliegt, z.B. $\mathrm{tr}\mathbf{P} = 0$ — isochores Fließen —, dann sind diese Überlegungen nicht mehr gültig und man muss auf die allgemeine Behandlung der Standard-Materialien zurückgreifen.

Bemerkungen zur Arbeit [4]: Moran, Ortiz&Shih untersuchen elastisch-plastische Materialien unter großen Verformungen. Um ihre Ergebnisse mit den oben Dargelegten vergleichen zu können, schreiben wir die Fließbedingung (1.7) mit (1.5) in der Form

$$\Phi(\mathbf{E}_e, \mathbf{Z}_{eB}, \kappa) = \Phi(\mathbf{E}_e(\mathbf{Z}_e), \mathbf{Z}_{eB}, \kappa) =: \bar{\Phi}(\mathbf{Z}_e, \mathbf{Z}_{eB}, \kappa) = 0 \tag{1.37}$$

und bei glatter Berandung des elastischen Bereichs ergibt sich

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \mathbf{Z}_e} : \delta \mathbf{Z}_e = 0 \tag{1.38}$$

Variiert man die elastischen Verzerrungen und Beanspruchungen auf der Fließfläche, dann gilt andererseits nach (1.14) mit (1.12)

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{P} : \delta \mathbf{\Sigma} = \mathbf{P} : \left(\left(2 \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{Z}_e} : \delta \mathbf{Z}_e \right) \cdot \mathbf{Z}_e + (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e) \cdot \delta \mathbf{Z}_e \right) \\ &= \left(\mathrm{sym}[(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e) \cdot \mathbf{P}] + \mathrm{sym}[2\,\mathbf{P} \cdot \mathbf{Z}_e] : \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{Z}_e} \right) : \delta \mathbf{Z}_e \end{aligned} \tag{1.39}$$

Vergleich von (1.38) mit (1.39) zeigt

$$\left(\mathrm{sym}[(\mathbf{1}+2\mathbf{E}_e)\cdot\mathbf{P}]+\mathrm{sym}[2\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{Z_e}]:\frac{\partial\mathbf{E}_e}{\partial\mathbf{Z}_e}\right)\propto\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\mathbf{Z}_e} \tag{1.40}$$

Moran, Ortiz&Shih definieren assoziiertes plastisches Fließen nun rein formal und ohne auf die oben dargelegten Konzepte Bezug zu nehmen durch die abweichende Relation

$$\mathrm{sym}[(\mathbf{1}+2\mathbf{E}_e)\cdot\mathbf{P}]\propto\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\mathbf{Z}_e} \tag{1.41}$$

und finden folglich, dass die tangentiale Steifigkeit der so erklärten plastischen Materialien i. Allg. nicht symmetrisch ist, was uns nicht überrascht.
Die Lesbarkeit der genannten Arbeit wird erschwert durch die Tatsache, dass die Autoren eine ungewöhnliche Tensornomenklatur verwenden. So hat ihre Definition des symmetrischen Teils bzw. des Deviators eines Tensors teils die herkömmliche, teils aber auch eine abweichende Bedeutung — siehe ihre Formeln (4), (20). Das gilt auch für die Beziehung (1.41), deren linke Seite in ihrer Formel (44) einfach sym$\mathbf{P}$ lautet. (Sie schreiben $\bar{\mathbf{R}}$ statt $\mathbf{P}$.)

Kapitel 2

Spezialisierung auf die Stoffgleichungen von Teil I

2.1 Quadratische Fließbedingung und assoziierte Fließregel

Aus (1.12) mit (1.9) folgern wir

$$\delta\boldsymbol{\Sigma} = 2\,\delta\mathbf{E}_e\cdot\mathbf{Z}_e+(\mathbf{1}+2\mathbf{E}_e)\cdot\delta\mathbf{Z}_e = 2\,\delta\mathbf{E}_e\cdot\mathbf{Z}_e+(\mathbf{1}+2\mathbf{E}_e)\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial\mathbf{E}_e^2} : \delta\mathbf{E}_e = \frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\mathbf{E}_e} : \delta\mathbf{E}_e \tag{2.1}$$

Führen wir ferner

$$\bar{\mathbf{Z}}_e = \mathbf{Z}_e' - \mathbf{Z}_{eB} \tag{2.2}$$

ein und beschreiben den elastischen Bereich zunächst in leichter Verallgemeinerung von Teil I speziell durch

$$\Phi(\mathbf{E}_e, \mathbf{Z}_{eB}, \kappa) = \bar{\mathbf{Z}}_e : \mathcal{B} : \bar{\mathbf{Z}}_e - \frac{1}{\varrho_0^2} z(\kappa)^2 \leq 0 \tag{2.3}$$

— die symmetrische Tetrade $\mathcal{B}$ bildet die Menge der symmetrischen Deviatoren in sich selbst ab — so ergibt sich weiter bei festgehaltenem elastischen Bereich

$$\delta\Phi = 2\,\bar{\mathbf{Z}}_e : \mathcal{B} : \delta\mathbf{Z}_e' = 2\,\bar{\mathbf{Z}}_e : \mathcal{B} : \frac{\partial^2 W}{\partial\mathbf{E}_e^2} : \delta\mathbf{E}_e = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{E}_e} : \delta\mathbf{E}_e \tag{2.4}$$

Verallgemeinerte Normalität im Sinne von (1.16) liegt nun vor, wenn für alle $\delta\mathbf{E}_e$ gilt

$$\mathbf{P} : \left(2\,\delta\mathbf{E}_e\cdot\mathbf{Z}_e + (\mathbf{1}+2\mathbf{E}_e)\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial\mathbf{E}_e^2} : \delta\mathbf{E}_e\right) = \lambda\,2\,\bar{\mathbf{Z}}_e : \mathcal{B} : \frac{\partial^2 W}{\partial\mathbf{E}_e^2} : \delta\mathbf{E}_e \tag{2.5}$$

und somit

$$\mathrm{sym}[2\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{Z}_e\,] + \mathrm{sym}[\,(\mathbf{1}+2\mathbf{E}_e)\cdot\mathbf{P}\,] : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}_e^2} = \lambda\,2\,\bar{\mathbf{Z}}_e : \mathcal{B} : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}_e^2} \tag{2.6}$$

Dies ist eine Einschränkung in Form einer symmetrischen Tensorgleichung an den allgemein unsymmetrischen Tensor $\mathbf{P}$, der dadurch nicht vollständig festgelegt wird.

2.2 Skalare und kinematische Verfestigung

Den Betrag von $\mathbf{P}$ erhalten wir aus der Konsistenzbedingung. Dazu konkretisieren wir die Verfestigung durch die Vorgaben

$$\dot{\kappa} = |\mathbf{P}| \tag{2.7}$$

und

$$\dot{\mathbf{Z}}_{eB} = \mu\left(\frac{1}{\varrho_0}\mathbf{P} - \frac{\mathbf{Z}_{eB}}{y(\kappa)}\,|\mathbf{P}|\right) \tag{2.8}$$

Während des plastischen Fließens muss die Fließbedingung identisch erfüllt, also ihre Zeitableitung identisch Null sein:

$$0 = \tfrac{1}{2}\,\dot{\Phi} = \bar{\mathbf{Z}}_e : \mathcal{B} : \dot{\bar{\mathbf{Z}}}_e - \frac{1}{\varrho_0^2} z(\kappa)\,z'(\kappa)\dot{\kappa} \tag{2.9}$$

also mit (2.2), (1.9), (1.4), (1.6), (2.7) und (2.8)

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \bar{\mathbf{Z}}_e : \mathcal{B} : \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}_e^2} : \left(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{N}^T\cdot\dot{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{N} - \mathrm{sym}[\,(\mathbf{1}+2\mathbf{E}_e)\cdot\mathbf{P}\,]\right) - \mu\Big(\frac{1}{\varrho_0}\mathbf{P} - \frac{\mathbf{Z}_{eB}}{y(\kappa)}\,|\mathbf{P}|\Big)\right) \\ & - \frac{1}{\varrho_0^2} z(\kappa)\,z'(\kappa)\,|\mathbf{P}| \end{aligned} \tag{2.10}$$

und daraus

$$|\mathbf{P}| = \beta\frac{Z}{N} \tag{2.11}$$

mit dem Zähler

$$Z = \bar{\mathbf{Z}}_e : \mathcal{B} : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}_e^2} : \tfrac{1}{2}\,\mathbf{N}^T\cdot\dot{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{N} \tag{2.12}$$

dem Nenner

$$N = \bar{\mathbf{Z}}_e : \mathcal{B} : \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}_e^2} : \mathrm{sym}[\,(\mathbf{1}+2\mathbf{E}_e)\cdot\vec{\mathbf{P}}\,] + \mu\Big(\frac{1}{\varrho_0}\vec{\mathbf{P}} - \frac{\mathbf{Z}_{eB}}{y(\kappa)}\Big)\right) + \frac{1}{\varrho_0^2} z(\kappa)\,z'(\kappa) \tag{2.13}$$

und dem Schaltparameter β. Es ist $\beta = 0$ im elastischen Bereich und auf der Fließgrenze im Falle der Entlastung ($Z \leq 0$), sonst $\beta = 1$.

2.3 Infinitesimale Steifigkeit

Wenn der Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{C}$ sich während einer Zeiteinheit um $\dot{\mathbf{C}}$ ändert, dann nimmt der hinsichtlich der Bezugsplatzierung definierte 2. Piola-Kirchhoff-Beanspruchungstensor $\mathbf{Z}$ zu um

$$\dot{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\varrho_0} \mathcal{T} : \dot{\mathbf{C}} \tag{2.14}$$

Die Tetrade $\mathcal{T}$ wird als infinitesimale Steifigkeit des Materials bezeichnet und besitzt für elastisch-plastische Verformung (Belastung) und für rein elastische Entlastung unterschiedliche Werte. Diese sind symmetrisch, wenn die quadratische Form

$$\dot{\mathbf{C}}^* : \dot{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\varrho_0} \dot{\mathbf{C}}^* : \mathcal{T} : \dot{\mathbf{C}} \tag{2.15}$$

gegen Vertauschen von $\dot{\mathbf{C}}$ und $\dot{\mathbf{C}}^*$ invariant ist. Um sie zu erhalten, bilden wir die materielle Zeitableitung von $\mathbf{Z}$ unter Beachtung von (1.3), (1.4), (1.9) und finden

$$\dot{\mathbf{Z}} = 2\,\mathrm{sym}[\,\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{Z}_e \cdot \mathbf{N}^T\,] + \mathbf{N} \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}_e^2} : \left(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{N} + \mathrm{sym}[\,\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{N}}\,] \right) \right) \cdot \mathbf{N}^T. \tag{2.16}$$

und daraus weiter mit (1.6) und (1.4)

$$\begin{aligned} 2\,\dot{\mathbf{C}}^* : \dot{\mathbf{Z}} \;=\; & \mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{C}}^* \cdot \mathbf{N} : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}_e^2} : \mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{N} \\ & -2\,\mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{C}}^* \cdot \mathbf{N} : \left(\mathrm{sym}[2\,\vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{Z}_e\,] + \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}_e^2} : \mathrm{sym}[\,(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e) \cdot \vec{\mathbf{P}}\,] \right) |\mathbf{P}| \end{aligned} \tag{2.17}$$

Einsetzen von (2.11) mit (2.12) in (2.17) gibt schließlich

$$\frac{2}{\varrho_0}\,\dot{\mathbf{C}}^* : \mathcal{T} : \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{C}}^* \cdot \mathbf{N} : \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}_e^2} - \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} \right) : \mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{N} \tag{2.18}$$

mit den Abkürzungen

$$\mathbf{G} = \sqrt{\beta\,\frac{\mathbf{X} : \mathbf{Y}}{N}}\;\mathbf{R} \tag{2.19}$$

sowie

$$\mathbf{X} = \mathrm{sym}[2\,\vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{Z}_e\,] + \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}_e^2} : \mathrm{sym}[\,(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e) \cdot \vec{\mathbf{P}}\,] \tag{2.20}$$

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Z}}_e : \mathcal{B} : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}_e^2} \tag{2.21}$$

und

$$\mathbf{R} = \vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{Y}} \tag{2.22}$$

Die zuletzt benutzte Gleichheit der Richtungen $\mathbf{R}$ der Tensoren $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ erschließt man aus (2.6).
Die elastische Steifigkeit $\partial^2 W/\partial \mathbf{E}_e^2$ ist symmetrisch, und man erkennt aus (2.18), dass die infinitesimale Steifigkeit $\mathcal{T}$ sowohl im elastischen als auch im plastischen Falle symmetrisch ist. Die Größe der elastischen Verzerrung ist dabei keinerlei Einschränkungen unterworfen worden. Damit haben wir für dieses spezielle Material explizit gezeigt, dass die verallgemeinerte Konvexität die Symmetrie der infinitesimalen Steifigkeit zur Folge hat.

2.4 Kleine elastische Verzerrungen

Die Annahme kleiner elastischer Verzerrungen erlaubt in den Stoffgleichungen eine Vielzahl von Vereinfachungen:

1. Die Speicherenergie wird in klassischer Weise quadratisch angesetzt in der Form
$$W(\mathbf{E}_e) = \frac{1}{2\varrho_0}\, \mathbf{E}_e : \mathcal{C} : \mathbf{E}_e \tag{2.23}$$
und die Gleichung (1.9) des elastischen Verhaltens vereinfacht sich daher mit (1.2) zu
$$\mathbf{S}_e = \varrho_Z \mathbf{Z}_e = \varrho_Z \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}_e} = \frac{\varrho_Z}{\varrho_0} \mathcal{C} : \mathbf{E}_e \tag{2.24}$$

2. Die Ermittlung von $\mathbf{X}$ lässt sich unter Beachtung von $\partial^2 W/\partial \mathbf{E}_e^2 = \mathcal{C}/\varrho_0$ reduzieren auf:
$$\varrho_0 \mathbf{X} = \mathrm{sym}[2\,\vec{\mathbf{P}} \cdot \mathcal{C} : \mathbf{E}_e\,] + \mathcal{C} : \mathrm{sym}[\,(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e) \cdot \vec{\mathbf{P}}\,] \approx \mathcal{C} : \mathrm{sym}\,\vec{\mathbf{P}} \tag{2.25}$$
Man erkennt, dass die beiden gestrichenen Terme von gleicher Größenordnung, nämlich linear in $\mathbf{E}_e$ sind.

3. Wendet man dieselbe Vereinfachung auf der linken Seite von Gleichung (2.6) an und beachtet, dass $\mathcal{C}$ invertierbar ist, so findet man
$$\mathrm{sym}\,\mathbf{P} = 2\lambda \bar{\mathbf{Z}}_e : \mathcal{B} = \frac{2\lambda}{\varrho_Z}\, \mathbf{H} \tag{2.26}$$

mit

$$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{S}}_e : \mathcal{B} = \mathcal{B} : \bar{\mathbf{S}}_e \tag{2.27}$$

Ein Vergleich von (1.6) mit den Gleichungen (1.11), (1.12) von Teil I zeigt

$$\mathbf{P} = -\mathbf{N}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{N}} = \mathbf{H}\, g \tag{2.28}$$

woraus man skw $\mathbf{P} = 0$ und $g = 2\lambda/\varrho_Z$ ersieht. Da aber $\mathbf{H}$ und damit nun auch $\mathbf{P}$ ein Deviator ist, erweist die plastische Verformung sich als isochor, die Dichte ϱ_Z der Zwischenplatzierung bleibt konstant, und es kann $\varrho_Z/\varrho_0 = 1$ gewählt werden. Damit gehen alle Stoffgleichungen dieses Kapitels in diejenigen von Teil I über.

4. Die Gleichung (2.18) zur Ermittlung der infinitesimalen Steifigkeit vereinfacht sich zu

$$2\,\dot{\mathbf{C}}^* : \mathcal{T} : \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{C}}^* \cdot \mathbf{N} : \big(\mathcal{C} - \varrho_0 \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}\big) : \mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{N} \tag{2.29}$$

Wegen der Setzung skw$\mathbf{P} = 0$ gilt nach (2.26), (2.27)

$$\vec{\mathbf{P}} = \omega\, \mathcal{B} : \bar{\mathbf{S}}_e \quad \text{mit} \quad \omega = \big(\bar{\mathbf{S}}_e : \mathcal{B}^2 : \bar{\mathbf{S}}_e\big)^{-1/2} \tag{2.30}$$

und mit (2.25) und (2.21) daher

$$\varrho_0 \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} = \frac{\beta}{N}\, \varrho_0 \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} = \frac{\beta}{N}\, \vec{\mathbf{P}} : \mathcal{C} \otimes \frac{1}{\varrho_0^2} \mathcal{C} : \mathcal{B} : \bar{\mathbf{S}}_e = \frac{\beta\,\omega}{\varrho_0^2\, N}\, \bar{\mathbf{S}}_e : \mathcal{B} : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} : \mathcal{B} : \bar{\mathbf{S}}_e \tag{2.31}$$

Der Nenner gemäß (2.13) vereinfacht sich dabei zu

$$\varrho_0^2\, N = \bar{\mathbf{S}}_e : \mathcal{B} : \left(\mathcal{C} : \vec{\mathbf{P}} + \mu\Big(\vec{\mathbf{P}} - \frac{\mathbf{S}_{eB}}{y(\kappa)}\Big)\right) + z(\kappa)\, z'(\kappa) \tag{2.32}$$

Es ist offenkundig, dass durch die Vernachlässigung der kleinen elastischen Terme eine Vielzahl von tensorarithmetischen Operationen eingespart wird. Zugleich bleibt die infinitesimale Steifigkeit symmetrisch, allerdings nur, wenn man bei ihrer Berechnung konsequent alle Terme streicht, die mit verschwindenden elastischen Verzerrungen gegen Null gehen. Wenn man nur die Stoffgleichungen für kleine elastische Verzerrungen vereinfacht, dann aber Konsequenz vermissen lässt, indem man bei der Berechnung der infinitesimalen Steifigkeit durch Differentiation nicht ebenfalls Streichungen vornimmt, dann können kleine unsymmetrische Anteile eingeschleppt werden.
Die genannten Streichungen sind sehr gefährlich, wenn materielle Stabilität mit dem Hadamard'schen Kriterium untersucht werden soll. Wenn man auf die Mitnahme der kleinen elastischen Terme verzichtet, dann macht das Instabilitätsphänomen sich nämlich gar nicht bemerkbar.

Kapitel 3

Algorithmische Steifigkeit

3.1 Unsymmetrie bei Anisotropie

Die infinitesimale tangentiale Steifigkeit ist rein physikalisch definiert. Anders steht es mit der tangentialen Steifigkeit, die bei Verwendung endlicher Schrittweiten und einer Gleichgewichtsiteration mit dem Newton-Verfahren benötigt wird. Dabei benutzt man ein numerisches Verfahren, um die Stoffgleichung über das Inkrement zu integrieren. Der Endwert der Spannung und die zugehörige Steifigkeit hängen dabei nicht nur von der Physik, sondern auch von der Wahl der Integrationsmethode ab. Deshalb ist auch die Bezeichnung „algorithmische tangentiale Steifigkeit" gebräuchlich. Für deren Symmetrieeigenschaften interessieren wir uns im Folgenden.
Bedeutet $\mathbf{C}$ den Wert des rechten Cauchy-Green-Tensors am Ende des Zeitinkrements, so liefert das Integrationsverfahren den zugehörigen Endwert von $\mathbf{N}$ und daraus mit (1.3), (1.4), (1.5) den Endwert von $\mathbf{Z}$. Weil in unserem Falle die Dichte der Zwischenplatzierung ϱ_Z konstant bleibt, bietet es sich an, nicht mit den Beanspruchungen, sondern mit den gebräuchlicheren Spannungen zu arbeiten. Der Zusammenhang zwischen einer Änderung $\delta\mathbf{C}$ des Endwerts $\mathbf{C}$ und einer Änderung $\delta\mathbf{S}$ des Endwerts $\mathbf{S}$ ist die gesuchte algorithmische Steifigkeit. Sie ergibt sich durch Ableitung von (1.3) unter Beachtung von (2.24) und (1.4) zu

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{S} &= 2\mathrm{sym}[\,\delta\mathbf{N}\cdot\mathbf{S}_e\cdot\mathbf{N}^T\,] \\
&\quad +\mathbf{N}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\,\mathcal{C} : \left(\mathbf{N}^T\cdot\delta\mathbf{C}\cdot\mathbf{N} + 2\mathrm{sym}[\,\mathbf{N}^T\cdot\mathbf{C}\cdot\delta\mathbf{N}\,]\right)\right)\cdot\mathbf{N}^T \\
&= 2\mathrm{sym}[\,\delta\mathbf{N}\cdot(\mathcal{C}:\mathbf{E}_e)\cdot\mathbf{N}^T\,] \\
&\quad +\mathbf{N}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\,\mathcal{C} : \left(\mathbf{N}^T\cdot\delta\mathbf{C}\cdot\mathbf{N} + 2\mathrm{sym}[\,(\mathbf{1}+2\mathbf{E}_e)\cdot\mathbf{N}^{-1}\cdot\delta\mathbf{N}]\right)\right)\cdot\mathbf{N}^T
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Die verschiedenen numerischen Integrationsverfahren unterscheiden sich in der Art, wie sie $\mathbf{N}$ als Funktion von $\mathbf{C}$ und damit $\delta\mathbf{N}$ als Funktion von $\delta\mathbf{C}$ darstellen. Wir wählen im Folgenden das in Teil I beschriebene Verfahren, welches die plastische Volumenkonstanz exakt sicherstellt.
Quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens ist nur gesichert, wenn die korrekte algorithmische Steifigkeit benutzt, also alle Terme in (3.1) mitgeführt werden. Wenn wir die in $\mathbf{E}_e$ linearen Terme streichen, also mit

$$\delta\mathbf{S} = \mathbf{N} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\,\mathcal{C} : \left(\mathbf{N}^T \cdot \delta\mathbf{C} \cdot \mathbf{N} + 2\mathrm{sym}[\,\mathbf{N}^{-1} \cdot \delta\mathbf{N}\,] \right) \right) \cdot \mathbf{N}^T \tag{3.2}$$

arbeiten, dann ist der Fehler bei sehr kleinen elastischen Verzerrungen $\mathbf{E}_e$ sicher vernachlässigbar. Das ist der Fall, wenn die Iteration bereits dicht an die Lösung geführt hat, nicht aber unbedingt bei Zwischenschritten der Iteration. Um die Symmetrie der algorithmischen Steifigkeit zu diskutieren, wollen wir im Folgenden jedoch diese Vereinfachung vornehmen, wie wir es auch bei der infinitesimalen Steifigkeit getan haben.
Die Vorschrift zur Berechnung von $\mathbf{N}$ lautet bei unserem Verfahren — vgl. Teil I, Formel (2.23) —

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}^t \cdot \mathrm{e}^{-\mathbf{V}} \tag{3.3}$$

($\mathbf{N}^t$ ist der Ausgangswert am Beginn des Inkrements, Werte am Inkrementende — deren Änderung wir untersuchen wollen — werden ohne Index geschrieben) und $\mathbf{V}$ ist aus der nichtlinearen Deviatorgleichung $\mathbf{G}(\mathbf{V}) = 0$ — Teil I, Formel (2.36) — zu ermitteln. Um die Änderung von $\mathbf{V}$ in Abhängigkeit von der Änderung von $\mathbf{C}$ anzugeben, deuten wir letztgenannte Gleichung als Verknüpfung zwischen diesen beiden Variablen, also als

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{C}) = 0 \tag{3.4}$$

Ableitung gibt

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{V}} : \delta\mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{C}} : \delta\mathbf{C} = 0, \tag{3.5}$$

d.h. mit den Definitionen nach Teil I, (2.33), also

$$\mathcal{C}' = \left(\mathcal{I} - \tfrac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) : \mathcal{C} \tag{3.6}$$

und (2.38) den Zusammenhang

$$\mathcal{A} : \delta\mathbf{V} = -\tfrac{1}{2}\mathcal{C}' : \left(\mathbf{N}^T \cdot \delta\mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \right) \tag{3.7}$$

Ableiten von (3.3) und Einsetzen der letzten Gleichung liefert

$$\mathbf{N}^{-1} \cdot \delta\mathbf{N} = -\,\mathrm{e}^{\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{V}} : \mathcal{A}^{-1} : \tfrac{1}{2}\mathcal{C}' : \left(\mathbf{N}^T \cdot \delta\mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \right) \tag{3.8}$$

Dass auf der rechten und linken Seite dieser Gleichung jeweils ein (i. Allg. unsymmetrischer) Deviator steht, sieht man durch Spurbildung. Da $\mathbf{V}$ in (3.3) ein Deviator sein soll, ist die Determinante von $\mathbf{N}$ gleich derjenigen von $\mathbf{N}^t$, also unabhängig von $\mathbf{V}$ und damit von $\mathbf{C}$. Folglich gilt in der Tat

$$0 = \delta(\det \mathbf{N}) = \det \mathbf{N}\ \mathrm{tr}(\mathbf{N}^{-1} \cdot \delta\mathbf{N}). \tag{3.9}$$

Der zweite Summand in (3.2) lässt sich deswegen unter Beachtung von (3.6) schreiben als

$$\tfrac{1}{2}\,\mathcal{C} : 2\mathrm{sym}[\,\mathbf{N}^{-1}\!\cdot\!\delta\mathbf{N}\,] = \mathcal{C} : \big(\mathcal{I} - \tfrac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\big) : \mathrm{sym}[\,\mathbf{N}^{-1}\!\cdot\!\delta\mathbf{N}\,] = (\mathcal{C}')^T : \mathrm{sym}[\,\mathbf{N}^{-1}\!\cdot\!\delta\mathbf{N}\,] \tag{3.10}$$

Um nun die Symmetrie der algorithmischen tangentialen Steifigkeit $\partial\mathbf{S}/\partial\mathbf{C}$ zu prüfen, bilden wir die Bilinearform

$$\begin{aligned}
&2\,\delta^*\mathbf{C} : \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}} : \delta\mathbf{C} = 2\,\delta^*\mathbf{C} : \delta\mathbf{S} \\
&= \mathbf{N}^T \cdot \delta^*\mathbf{C} \cdot \mathbf{N} : \mathcal{C}\ : \mathbf{N}^T \cdot \delta\mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \\
&-\mathbf{N}^T \cdot \delta^*\mathbf{C} \cdot \mathbf{N} : (\mathcal{C}')^T : \mathrm{sym}\Big[\mathrm{e}^{\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial\mathbf{V}} : \mathcal{A}^{-1} : \mathcal{C}' : \big(\mathbf{N}^T \cdot \delta\mathbf{C} \cdot \mathbf{N}\big)\Big]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Der erste Summand — der die elastische Verformung beschreibt — ist wegen der Symmetrie von $\mathcal{C}$ symmetrisch in $\delta^*\mathbf{C}$ und $\delta\mathbf{C}$. Eine Unsymmetrie kann also nur vom zweiten Summanden verursacht werden, der die plastische Verformung kennzeichnet. Mit den Abkürzungen

$$\delta\mathbf{X} \;=\; \mathcal{A}^{-1} : \mathcal{C}' : \big(\mathbf{N}^T \cdot \delta\mathbf{C} \cdot \mathbf{N}\big) \tag{3.12}$$

$$\delta^*\mathbf{X} \;=\; \mathcal{A}^{-1} : \mathcal{C}' : \big(\mathbf{N}^T \cdot \delta^*\mathbf{C} \cdot \mathbf{N}\big) \tag{3.13}$$

wird aus diesem — bis auf das Minuszeichen —

$$(\mathcal{A} : \delta^*\mathbf{X}) : \mathrm{sym}\Big[\mathrm{e}^{\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial\mathbf{V}} : \delta\mathbf{X}\Big]. \tag{3.14}$$

Nun müssen wir aber im ersten Summanden der Formel (2.39) von Teil I den Ausdruck

$$\mathrm{e}^{-\mathbf{V}} \cdot \mathbf{N}^{tT} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}^t = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{V}} = (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e) \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{V}} \tag{3.15}$$

konsequenterweise ebenfalls durch Streichen von $\mathbf{E}_e$ vereinfachen. Aus Teil I, Formeln (2.38) bis (2.43) schließen wir daher

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} : \delta^*\mathbf{X} = \mathcal{C}' : \mathrm{sym}\Bigg[&\mathrm{e}^{\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{V}} : \delta^*\mathbf{X} \\
&+ \mathrm{e}^{-Y(\kappa^t+|\mathbf{V}|)} \frac{\mu}{y(\kappa^t+|\mathbf{V}|)} \left(\mathbf{S}^t_{eB} + \mu\,\vec{\mathbf{V}} \int_{\kappa^t}^{\kappa^t+|\mathbf{V}|} \mathrm{e}^{Y(\kappa)}\, d\kappa \right) \vec{\mathbf{V}} : \delta^*\mathbf{X} \\
&- \mu \mathrm{e}^{-Y(\kappa^t+|\mathbf{V}|)} \int_{\kappa^t}^{\kappa^t+|\mathbf{V}|} \mathrm{e}^{Y(\kappa)}\, d\kappa\, \frac{1}{|\mathbf{V}|} \left(\mathcal{I}' - \vec{\mathbf{V}} \otimes \vec{\mathbf{V}} \right) : \delta^*\mathbf{X} - \mu\,\vec{\mathbf{V}} \otimes \vec{\mathbf{V}} : \delta^*\mathbf{X} \\
&- \frac{1}{\sqrt{\mathbf{V} : \mathcal{B}^{-1} : \mathbf{V}}} \Bigg(z'(\kappa^t + |\mathbf{V}|)\, \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}\, |\mathbf{V}|\; \vec{\mathbf{V}} : \delta^*\mathbf{X} \\
&\quad + z(\kappa^t + |\mathbf{V}|) \left(\mathcal{B}^{-1} - \frac{\mathcal{B}^{-1} : \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} : \mathcal{B}^{-1}}{\mathbf{V} : \mathcal{B}^{-1} : \mathbf{V}} \right) : \delta^*\mathbf{X} \Bigg) \Bigg]
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Im Allgemeinen hat man davon auszugehen, dass die algorithmische tangentiale Steifigkeit Unsymmetrien aufweist, denn zumindest jene Summanden in (3.16), welche die Tetraden $\mathcal{C}$ oder $\mathcal{B}$ oder den Tensor $\mathbf{S}^t_{eB}$ enthalten, werden in der Regel keine Vertauschbarkeit im Ausdruck (3.14) zulassen.
Dasselbe lässt sich auch sagen über die Symmetrieeigenschaften des Tensors 4. Stufe $\mathcal{A}$, der bei der Stoffgesetziteration mit dem Newton-Verfahren benutzt wird. Dazu müssen wir die Symmetrie der Bilinearform

$$\delta\mathbf{X} : \mathcal{A} : \delta^*\mathbf{X} \tag{3.17}$$

studieren und finden, dass auf Grund gleichartiger Überlegungen Symmetrie im anisotropen Fall nicht zu erwarten ist.

3.2 Vereinfachungen bei Isotropie

Im Falle der elastischen Isotropie gilt

$$\mathcal{C} = 2G \left(\mathcal{I} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \tag{3.18}$$

Den Fall der plastischen Isotropie erhalten wir, indem wir für $\mathcal{B}$ die identische Abbildung auf dem Raum der symmetrischen Deviatoren wählen, also

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{I} - \tfrac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \tag{3.19}$$

und $\mathbf{S}_{eB} \equiv 0$, also auch $\mu = 0$ in (2.8), setzen. Die Fließbedingung (2.3) geht dann mit (2.2) in diejenige nach von Mises über:

$$\mathbf{S}'_e : \mathbf{S}'_e = z(\kappa)^2 \tag{3.20}$$

Um die Symmetrie der algorithmischen Steifigkeit im Falle der Isotropie zu beurteilen, bleibt zu prüfen, ob die Ausdrücke

$$\operatorname{sym}\left[\mathrm{e}^{\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{V}} : \delta \mathbf{X} \right] : \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} : \delta^* \mathbf{X} \tag{3.21}$$

und

$$\operatorname{sym}\left[\mathrm{e}^{\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{V}} : \delta \mathbf{X} \right] : \left(\mathcal{I} - \tfrac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) : \delta^* \mathbf{X} \tag{3.22}$$

unter Vertauschung von $\delta^*\mathbf{X}$ und $\delta\mathbf{X}$ invariant sind.
Um zu beurteilen, ob die Tetrade $\mathcal{A}$ symmetrisch ist, brauchen wir im Falle der Isotropie nach Einsetzen von (3.16) in (3.17) nur den ersten Summanden zu prüfen, also zu klären, ob

$$\delta \mathbf{X} : \left(\mathcal{I} - \tfrac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) : \operatorname{sym}\left[\mathrm{e}^{\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{V}} : \delta^* \mathbf{X} \right] \tag{3.23}$$

unter Vertauschung von $\delta^*\mathbf{X}$ und $\delta\mathbf{X}$ invariant ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn diese Invarianz auch bei dem vorigen Ausdruck (3.22) vorliegt.

Dass die Invarianz der Ausdrücke (3.21), (3.22) tatsächlich gegeben ist, wird in Teil III gezeigt. Im isotropen Falle sind demnach die algorithmische Steifigkeit und die Tetrade $\mathcal{A}$ im untersuchten Grenzfall verschwindend kleiner elastischer Verzerrungen symmetrisch. Die in 3.1 konstatierten Unsymmetrien sind demnach der Anisotropie des elastisch-plastischen Materialverhaltens zuzuschreiben und dürften folglich bei geringer Anisotropie nur unbedeutend sein.

3.3 Reihenentwicklung

Um den Zusammenhang zwischen infinitesimaler und algorithmischer Steifigkeit deutlicher zu machen, ist es nützlich, die algorithmische Steifigkeit in eine Reihe um $\mathbf{V} = 0$ zu entwickeln. Aus (3.16) entnehmen wir folgende Reihenentwicklung der Tetrade $\mathcal{A}$ in $|\mathbf{V}|$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-1} \frac{1}{|\mathbf{V}|} + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 |\mathbf{V}| + O(|\mathbf{V}|^2) \tag{3.24}$$

mit

$$\mathcal{A}_{-1} = -\frac{z(\kappa^t)}{\sqrt{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}}} \left(\mathcal{B}^{-1} - \frac{\mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}} \otimes \vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1}}{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}} \right) \tag{3.25}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 : \delta^* \mathbf{X} \;&=\; -\mathcal{C}' : \delta^* \mathbf{X} + \frac{\mu}{y(\kappa^t)}\, \mathbf{S}^t_{eB} \quad \vec{\mathbf{V}} : \delta^* \mathbf{X} \\ &\quad - \mu\, \delta^* \mathbf{X} - \frac{z'(\kappa^t)}{\sqrt{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}}} \quad \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}} \quad \vec{\mathbf{V}} : \delta^* \mathbf{X} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Wir bemerken, dass die Tetrade $\mathcal{A}$ beim Grenzübergang nach $\mathbf{V} = 0$ über alle Grenzen wächst. Für ihre Inverse setzen wir die Reihenentwicklung

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1\, |\mathbf{V}| + O(|\mathbf{V}|^2) \tag{3.27}$$

an und ermitteln ihre Summanden aus einem Koeffizientenvergleich an den Forderungen

$$\begin{aligned} \mathcal{I}' \;&=\; \mathcal{A} : \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}_{-1} : \mathcal{D}_0\, \frac{1}{|\mathbf{V}|} \;+\; \mathcal{A}_{-1} : \mathcal{D}_1 + \mathcal{A}_0 : \mathcal{D}_0 \;+\; O(|\mathbf{V}|) \\ &=\; \mathcal{A}^{-1} : \mathcal{A} = \mathcal{D}_0 : \mathcal{A}_{-1}\, \frac{1}{|\mathbf{V}|} \;+\; \mathcal{D}_1 : \mathcal{A}_{-1} + \mathcal{D}_0 : \mathcal{A}_0 \;+\; O(|\mathbf{V}|) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Damit der Koeffizient bei $|\mathbf{V}|^{-1}$ verschwindet, muss gelten

$$\left(\mathcal{B}^{-1} - \frac{\mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}} \otimes \vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1}}{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}} \right) : \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0 : \left(\mathcal{B}^{-1} - \frac{\mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}} \otimes \vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1}}{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}} \right) = 0 \tag{3.29}$$

also ausmultipliziert

$$\mathcal{D}_0 \;=\; \vec{\mathbf{V}} \otimes \frac{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1} : \mathcal{D}_0}{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}} \;=\; \frac{\mathcal{D}_0 : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}}{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}} \otimes \vec{\mathbf{V}} \tag{3.30}$$

und folglich die Struktur

$$\mathcal{D}_0 = d_0 \vec{\mathbf{V}} \otimes \vec{\mathbf{V}} \tag{3.31}$$

Der von $|\mathbf{V}|$ unabhängige Term liefert nach (3.28)

$$-\frac{z(\kappa^t)}{\sqrt{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}}} \left(\mathcal{B}^{-1} - \frac{\mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}} \otimes \vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1}}{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}} \right) : \mathcal{D}_1 = \mathcal{I}' - \mathcal{A}_0 : \mathcal{D}_0 \tag{3.32}$$

und

$$-\frac{z(\kappa^t)}{\sqrt{\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{B}^{-1}:\vec{\mathbf{V}}}}\,\mathcal{D}_1:\left(\mathcal{B}^{-1}-\frac{\mathcal{B}^{-1}:\vec{\mathbf{V}}\otimes\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{B}^{-1}}{\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{B}^{-1}:\vec{\mathbf{V}}}\right)=\mathcal{I}'-\mathcal{D}_0:\mathcal{A}_0 \quad (3.33)$$

und ausmultipliziert unter Beachtung von (3.31)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_1+\frac{\sqrt{\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{B}^{-1}:\vec{\mathbf{V}}}}{z(\kappa^t)}\mathcal{B}\\
&=\vec{\mathbf{V}}\otimes\frac{\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{B}^{-1}:\mathcal{D}_1}{\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{B}^{-1}:\vec{\mathbf{V}}}+\frac{\sqrt{\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{B}^{-1}:\vec{\mathbf{V}}}}{z(\kappa^t)}\,d_0\mathcal{B}:\mathcal{A}_0:\vec{\mathbf{V}}\otimes\vec{\mathbf{V}}\\
&=\frac{\mathcal{D}_1:\mathcal{B}^{-1}:\vec{\mathbf{V}}}{\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{B}^{-1}:\vec{\mathbf{V}}}\otimes\vec{\mathbf{V}}+\frac{\sqrt{\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{B}^{-1}:\vec{\mathbf{V}}}}{z(\kappa^t)}\,d_0\vec{\mathbf{V}}\otimes\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{A}_0:\mathcal{B}
\end{aligned} \quad (3.34)$$

Bildet man das Doppelpunktprodukt der letzten Zeile mit $\mathcal{B}^{-1}:\vec{\mathbf{V}}$, dann erhält man

$$\vec{\mathbf{V}}=d_0\,\vec{\mathbf{V}}\quad\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{A}_0:\vec{\mathbf{V}} \quad (3.35)$$

woraus sich ergibt

$$d_0=\frac{1}{\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{A}_0:\vec{\mathbf{V}}} \quad (3.36)$$

Durch Vergleich der letzten beiden Zeilen von (3.34) erschließt man ferner folgende Struktur

$$\mathcal{D}_1=d_1\vec{\mathbf{V}}\otimes\vec{\mathbf{V}}+\frac{\sqrt{\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{B}^{-1}:\vec{\mathbf{V}}}}{z(\kappa^t)}\left(\mathcal{B}:\frac{\mathcal{A}_0:\vec{\mathbf{V}}\otimes\vec{\mathbf{V}}}{\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{A}_0:\vec{\mathbf{V}}}+\frac{\vec{\mathbf{V}}\otimes\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{A}_0}{\vec{\mathbf{V}}:\mathcal{A}_0:\vec{\mathbf{V}}}:\mathcal{B}-\mathcal{B}\right) \quad (3.37)$$

worin d_1 vorerst nicht näher bestimmt ist.
Nunmehr können wir Gleichung (3.11) diskutieren. Der erste Summand ist für alle Werte von $\mathbf{V}$ symmetrisch, so dass nur der Einfluss von $\mathbf{V}$ auf den zweiten zu betrachten bleibt. Mit den Abkürzungen

$$\mathbf{U}^*=\mathcal{C}':\mathbf{N}^T\cdot\delta^*\mathbf{C}\cdot\mathbf{N}\,,\qquad\qquad \mathbf{U}=\mathcal{C}':\mathbf{N}^T\cdot\delta\mathbf{C}\cdot\mathbf{N} \quad (3.38)$$

schreibt dieser sich

$$-\mathbf{U}^*:\mathrm{sym}\Big[\mathrm{e}^{\mathbf{V}}\cdot\frac{\partial\mathrm{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial\mathbf{V}}:\mathcal{A}^{-1}:\mathbf{U}\Big] \quad (3.39)$$

Nun ist aber

$$\delta\big(\mathrm{e}^{-\mathbf{V}}\big) = \delta\big(\mathbf{1} - \mathbf{V} + \tfrac{1}{2}\mathbf{V}^2 - \ldots\big) = \frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{V}} : \delta\mathbf{V} = -\delta\mathbf{V} + \mathrm{sym}[\,\mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{V}\,] - \ldots \tag{3.40}$$

und daher wird aus (3.39) mit (3.27) die Reihenentwicklung

$$\mathbf{U}^* : \mathrm{sym}\Big[\,(\mathbf{1}{+}\mathbf{V}{+}\ldots)\cdot\Big((\mathcal{D}_0{+}\mathcal{D}_1\,|\mathbf{V}|{+}\ldots) : \mathbf{U}{-}\mathrm{sym}[\,\mathbf{V}\cdot(\mathcal{D}_0{+}\mathcal{D}_1\,|\mathbf{V}|{+}\ldots) : \mathbf{U}\,]{+}\ldots\Big)\Big] \tag{3.41}$$

Der von $|\mathbf{V}|$ unabhängige Term lautet mit (3.31)

$$\mathbf{U}^* : \mathrm{sym}\Big[\mathcal{D}_0 : \mathbf{U}\Big] = d_0\,\mathbf{U}^* : \vec{\mathbf{V}} \otimes \vec{\mathbf{V}} : \mathbf{U} \tag{3.42}$$

und ist offensichtlich in $\mathbf{U}$ und $\mathbf{U}^*$ symmetrisch.
Für den in $|\mathbf{V}|$ linearen Term erhalten wir

$$\mathbf{U}^* : \mathrm{sym}\Big[\,\mathbf{V}\cdot\mathcal{D}_0 : \mathbf{U} + |\mathbf{V}|\,\mathcal{D}_1 : \mathbf{U} - \mathrm{sym}[\,\mathbf{V}\cdot\mathcal{D}_0 : \mathbf{U}\,]\Big] = \mathbf{U}^* : \mathcal{D}_1 : \mathbf{U}\,|\mathbf{V}| \tag{3.43}$$

Er ist in $\mathbf{U}$ und $\mathbf{U}^*$ symmetrisch, wenn die Tetrade $\mathcal{D}_1$ symmetrisch ist, und das ist nach (3.37) genau dann der Fall, wenn $\mathcal{A}_0$ symmetrisch ist. Eine Betrachtung der Darstellung (3.26) zeigt, dass diese Eigenschaft bei elastischer und plastischer Isotropie vorliegt, aber auch bei elastischer Anisotropie, welche der Einschränkung $(\mathcal{C}')^T = \mathcal{C}'$ genügt, sonst jedoch nicht. Die algorithmische Steifigkeit besitzt also bei allgemein anisotropem Verhalten eine Unsymmetrie von erster Ordnung in $|\mathbf{V}|$, die folglich bei kleinen Werten von $\mathbf{V}$ numerisch unbedeutend sein wird.

3.4 Vergleich beider Tangentialsteifigkeiten

Wir wollen die algorithmische Steifigkeit im Grenzfall $\mathbf{V} = 0$ mit der infinitesimalen Steifigkeit vergleichen. Aus (3.11) mit (3.38), (3.42) und (3.36) erhalten wir

$$\begin{aligned} &2\,\delta^*\mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}}\Big(\mathbf{V} = 0\Big) : \delta\mathbf{C} \\ &= \mathbf{N}^T \cdot \delta^*\mathbf{C}\cdot\mathbf{N} : \left(\mathcal{C} + \frac{\mathcal{C} : \vec{\mathbf{V}} \otimes \vec{\mathbf{V}} : \mathcal{C}}{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{A}_0 : \vec{\mathbf{V}}}\right) : \mathbf{N}^T \cdot \delta\mathbf{C}\cdot\mathbf{N} \end{aligned} \tag{3.44}$$

wobei nach (3.26) gilt

$$\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{A}_0 : \vec{\mathbf{V}} = -\left(\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{C} : \vec{\mathbf{V}} + \mu\,\vec{\mathbf{V}} : \left(\vec{\mathbf{V}} - \frac{\mathbf{S}_{eB}}{y(\kappa)}\right) + z'(\kappa)\sqrt{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}}\right) \tag{3.45}$$

Andererseits ist nach (2.29) mit (2.30), (2.31), (2.32)

$$2\,\dot{\mathbf{C}}^* : \mathcal{T} : \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{N}^T{\cdot}\dot{\mathbf{C}}^*{\cdot}\mathbf{N} : \left(\mathcal{C} - \beta\frac{\mathcal{C} : \vec{\mathbf{P}} \otimes \vec{\mathbf{P}} : \mathcal{C}}{\vec{\mathbf{P}} : \mathcal{C} : \vec{\mathbf{P}} + \mu\,\vec{\mathbf{P}} : \left(\vec{\mathbf{P}} - \frac{\mathbf{S}_{eB}}{y(\kappa)}\right) + \omega z(\kappa)\, z'(\kappa)}\right) : \mathbf{N}^T{\cdot}\dot{\mathbf{C}}{\cdot}\mathbf{N} \tag{3.46}$$

Die Fließbedingung (2.3) lässt sich aber mit (2.30) in die Form

$$\bar{\mathbf{S}}_e : \mathcal{B} : \bar{\mathbf{S}}_e = \frac{1}{\omega^2}\vec{\mathbf{P}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{P}} = z(\kappa)^2 \tag{3.47}$$

bringen, so dass gilt

$$\omega z(\kappa) = \sqrt{\vec{\mathbf{P}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{P}}} \tag{3.48}$$

Nach (2.28) sowie nach Teil I, (2.21) ist aber

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{V}} \tag{3.49}$$

Da also $\vec{\mathbf{V}}$ in (3.44), (3.45) mit $\vec{\mathbf{P}}$ in (3.46), (3.48) identifiziert werden muss, wird die algorithmische Steifigkeit im Grenzfall $\mathbf{V} = 0$ mit der infinitesimalen Steifigkeit identisch. Daher ist es nicht überraschend, dass wenigstens in diesem Grenzfall die algorithmische Steifigkeit ebenso wie die infinitesimale auch bei anisotropem Verhalten symmetrisch ist.

Literatur

[1] R. von Mises, Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, ZAMM 8 (1928) 161-185

[2] D.C. Drucker, A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., ASME (1951) 487-491

[3] A. Krawietz, Passivität, Konvexität und Normalität bei elastisch-plastischem Material, Ing.-Archiv 51 (1981) 257-274

[4] B. Moran, M. Ortiz & C.F. Shih, Formulation of Implicit Finite Element Methods for Multiplicative Finite Deformation Plasticity, Int.J.Num.Meth.Eng. 29 (1990) 483-514

[5] C. Miehe & E. Stein, A Canonical Model of Multiplicative Elasto-Plasticity: Formulation and Aspects of the Numerical Implementation, IBNM-Bericht 92/3, Universität Hannover

[6] H. Ziegler, Thermomechanics, Quart. Appl. Math. (April 1972) 91-107

[7] B. Halphen & Nguyen Q.S., Sur les matériaux standards généralisés, Journal de Mécanique 14 (1975) 39-62

[8] H. G. Matthies, The Rate Problem for Complex Material Behaviour with Internal Variables, Proc. 2nd Int. Conf. Computational Plasticity (Eds: Owen, Hinton, Oñate), Barcelona 1989

[9] A. Krawietz, Materialtheorie, Springer Berlin 1986