Prof. Dr.-Ing. Arnold Krawietz

Anisotropes elastisch-plastisches Verhalten mit plastischer Volumenkonstanz bei kleinen elastischen und großen plastischen Verzerrungen

Teil I: Die phänomenologischen Stoffgleichungen und ihre numerische Integration

Berlin, den 6. Dezember 2004

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Anisotrope Elastoplastizität

Wir gründen unsere Beschreibung großer elastisch-plastischer Deformationen auf die multiplikative Zerlegung

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p \tag{1.1}$$

der lokalen Umplatzierung $\mathbf{F}$ (auch Deformationsgradient genannt) in einen elastischen und einen plastischen Anteil. (Dieser bisweilen beargwöhnte Zugang lässt sich streng gründen auf die Konzepte des Tangentialraumes des Körpers und eines Gitterraumes, ohne eine Bezugsplatzierung im Beobachterraum einführen zu müssen — vgl. [1] und [2]. Diese Ideen sollen hier aber nicht verfolgt werden.) Der rechte Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{C}$ ist definiert durch

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \tag{1.2}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir ferner

$$\mathbf{N} = \mathbf{F}_p^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}_e \tag{1.3}$$

Wir bezeichnen die Cauchy-Spannung mit $\mathbf{T}$, die aktuelle Massendichte mit ϱ und die Massendichte der Bezugsplatzierung und der Zwischenplazierung — letztere ist konstant, da wir nur iochore plastische Verformungen betrachten — mit ϱ_0.

Unsere Stoffgleichungen sollen ausschließlich formuliert werden mit Tensoren, die invariant sind unter einer überlagerten Starrkörperdrehung. Das ist der Fall bei $\mathbf{N}$ und $\mathbf{C}$ und bei dem hinsichtlich der Bezugsplatzierung definierten zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\mathbf{S}$, der eingeführt wird durch

$$\mathbf{S} = \frac{\varrho_0}{\varrho} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \tag{1.4}$$

Es ist ebenfalls der Fall bei dem auf das Gitter bezogenen und die elastischen Verformungen messenden rechten Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{C}_e$ und dem zugehörigen Green'schen Verzerrungstensor $\mathbf{E}_e$ gemäß

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \tag{1.5}$$

also

$$\mathbf{E}_e = \tfrac{1}{2}(\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{1}) \tag{1.6}$$

sowie bei dem zweiten Piola-Kirchhoff-Gitter-Spannungstensor

$$\mathbf{S}_e = \frac{\varrho_0}{\varrho} \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_e^{-T} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{N}^{-T} \tag{1.7}$$

Die elastische Verzerrung soll als klein unterstellt und das anisotrope elastische Verhalten beschrieben werden durch den linearen Zusammenhang

$$\mathbf{S}_e = \mathcal{C} : \mathbf{E}_e \tag{1.8}$$

Die kinematische Verfestigung kennzeichnen wir durch einen symmetrischen deviatorischen Rückspannungstensor $\mathbf{S}_{eB}$ und definieren zur Abkürzung noch folgenden Deviator — es soll $\mathbf{A}'$ den Deviator eines allgemeinen Tensors $\mathbf{A}$ bedeuten —

$$\bar{\mathbf{S}}_e = \mathbf{S}'_e - \mathbf{S}_{eB} \tag{1.9}$$

Den elastischen Bereich beschreiben wir durch die quadratische Bedingung

$$\Phi \equiv \bar{\mathbf{S}}_e : \mathcal{B} : \bar{\mathbf{S}}_e - z(\kappa)^2 \leq 0 \tag{1.10}$$

worin der Parameter κ eine skalare Verfestigung bewirkt. Die Tetrade $\mathcal{B}$ — eine symmetrische invertierbare Abbildung auf dem Raum der symmetrischen Deviatoren — beschreibt die genuine Anisotropie der Fließbedingung.
Die Änderung der plastischen Verformung setzen wir an als

$$\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} = -\mathbf{N}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{N}} = \mathbf{H}\, g \tag{1.11}$$

mit der assoziierten Fließregel

$$\mathbf{H} = \mathcal{B} : \bar{\mathbf{S}}_e \tag{1.12}$$

Weil der symmetrische Tensor $\mathbf{H}$ ein Deviator ist, erfolgt die plastische Verformung volumentreu.
Die Entwicklungsgleichung für die Rückspannung wird angesetzt in der Form

$$\dot{\mathbf{S}}_{eB} = \mu \left(\mathbf{H} - \frac{\mathbf{S}_{eB}}{y(\kappa)} |\mathbf{H}| \right) g \tag{1.13}$$

Als Entwicklungsgleichung für den Verfestigungsparameter wählen wir

$$\dot{\kappa} = |\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}| = |\mathbf{H}|\, g \tag{1.14}$$

Der Wert der Größe g ergibt sich aus der Konsistenzbedingung, d.h. der Forderung, während des gesamten plastischen Fließens müsse die Fließbedingung $\Phi = 0$ erfüllt sein.

Kapitel 2

Integration der Stoffgleichungen

2.1 Allgemeine Vorgehensweise

Da inelastisches Materialverhalten wegabhängig ist, muss der Gesamtdeformationsprozess des Materialelements in eine hinreichend große Anzahl von Inkrementen zerlegt werden. Über den Verformungsweg während eines einzelnen Inkrementes ist dann eine plausible Annahme zu treffen. Die Wegabhängigkeit des Verhaltens ist damit — inkrementweise — künstlich eliminiert. Aus der Fließtheorie der Plastizität wird — jeweils für ein Inkrement — eine Deformationstheorie: Der Zustand am Ende des Inkrements hängt nur noch von der Gesamtverzerrung am Ende (und natürlich vom Zustand am Anfang) ab.

2.2 Implizite Integration

Unsere inelastischen Stoffgleichungen liegen in Form gewöhnlicher Differentialgleichungen vor. Eine solcher Satz von Differentialgleichungen hat die Gestalt

$$\dot{y}(\tau) = f(y(\tau), \tau) \tag{2.1}$$

und wird ergänzt durch eine Anfangsbedingung

$$y(\tau = t) = y^t \tag{2.2}$$

Integration über das Zeitintervall Δt liefert

$$y^{t+\Delta t} - y^t = \int_t^{t+\Delta t} f(y(\tau), \tau)\, d\tau \tag{2.3}$$

Die einfachen Integrationsformeln vom Euler-Typ ergeben sich, indem der variable Integrand durch seinen Wert an einem festen Zwischenzeitpunkt $\hat{t}$

ersetzt wird, also

$$y^{t+\Delta t} = y^t + f(\,y^{\hat{t}}, \hat{t}\,)\Delta t \tag{2.4}$$

Das — nur für hinreichend kleine Schrittweiten stabile — explizite Verfahren entsteht durch die Wahl $\hat{t} = t$ und liefert das Ergebnis

$$y^{t+\Delta t} = y^t + f(y^t, t)\Delta t \tag{2.5}$$

Ein — (wenigstens im linearen Falle) unbedingt stabiles — implizites Verfahren ergibt sich mit der Wahl $\hat{t} = t + \Delta t$. Der gesuchte Endwert $y^{t+\Delta t}$ von y ist aus der i.a. nichtlinearen Gleichung

$$y^{t+\Delta t} = y^t + f(y^{t+\Delta t}, t + \Delta t)\Delta t \tag{2.6}$$

zu ermitteln.

- Es ist nun wichtig, sich darüber Rechenschaft zu geben, dass das Ergebnis einer solchen numerischen Integration nicht invariant gegenüber Variablentransformationen ist. Das soll das Beispiel der folgenden Differentialgleichung nebst Anfangsbedingung zeigen:

$$\dot{n}(\tau) = -n(\tau)h \quad \text{mit} \quad h = \mathit{const.} \tag{2.7}$$

Die Lösung mit dem Euler-Verfahren gibt

$$n^{t+\Delta t} = n^t - n(\hat{t})h\Delta t, \tag{2.8}$$

also explizit ($\hat{t} = t$)

$$n^{t+\Delta t} = n^t(1 - h\Delta t) \tag{2.9}$$

und implizit ($\hat{t} = t + \Delta t$)

$$n^{t+\Delta t} = n^t/(1 + h\Delta t) \tag{2.10}$$

Verwenden wir jedoch die Hilfsvariable $v(\tau) = \ln(n(t)/n(\tau))$, dann lässt die Anfangswertaufgabe sich umschreiben in

$$\dot{v}(\tau) = h, \quad v(t) = 0, \tag{2.11}$$

und das Euler-Verfahren liefert — explizit wie implizit — die exakte Lösung des Problems

$$v^{t+\Delta t} = h\Delta t, \quad \text{also} \quad n^{t+\Delta t} = n^t \mathrm{e}^{-h\Delta t} \tag{2.12}$$

2.3 Der elastische Fall

Bei der Integration der elastisch-plastischen Stoffgleichung ist zuerst zu untersuchen, ob der Zustand des Materialelements am Ende des Inkrements elastisch ist. In diesem Falle wird über den Verformungspfad folgende Annahme getroffen: Das Materialverhalten ist während des gesamten Inkrements elastisch gewesen, d.h. die inneren Zustandsvariablen (hier $\mathbf{N}$, $\mathbf{S}_{EB}$ und κ) haben sich nicht verändert. Der Tensor $\bar{\mathbf{S}}_e$ hat also am Ende des Inkrements gemäß (1.6), (1.8), (1.9) den Wert

$$\bar{\mathbf{S}}_e^{t+\Delta t} = \left(\tfrac{1}{2}\mathcal{C} : (\mathbf{N}^{tT} \cdot \mathbf{C}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{N}^t - \mathbf{1})\right)' - \mathbf{S}_{eB}^t \tag{2.13}$$

angenommen. Dieser ist zulässig, wenn er im elastischen Bereich oder auf der Fließfläche liegt. Dann hat man es in der Tat mit dem elastischen Fall zu tun, und die Integration der Stoffgleichung ist beendet. Gilt dagegen

$$\bar{\mathbf{S}}_e^{t+\Delta t} : \mathcal{B} : \bar{\mathbf{S}}_e^{t+\Delta t} - z(\kappa^t)^2 > 0 \tag{2.14}$$

dann ist eine rein elastische Verformung des Materialelements während des Zeitinkrements nicht möglich. Wie dann die Integration der Stoffgleichung vorgenommen werden kann, wird im Folgenden beschrieben.

2.4 Entwicklung der plastischen Verformung

Wir zerlegen den Tensor $\mathbf{H}$ in Betrag und Richtung gemäß

$$\mathbf{H} = |\mathbf{H}|\,\vec{\mathbf{H}} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{H}|^2 = \mathbf{H} : \mathbf{H}, \quad \vec{\mathbf{H}} : \vec{\mathbf{H}} = 1 \tag{2.15}$$

Das zu entwickelnde implizite Integrationsverfahren für die Stoffgleichung stützen wir auf eine einzige Annahme, nämlich:

- Während des gesamten Inkrements ist die Richtung $\vec{\mathbf{H}}$ des Tensors $\mathbf{H}$ des plastischen Verformungszuwachses konstant und zwar gleich seinem Wert am Ende des Inkrements.

Zunächst lässt (1.11) sich mit (1.14) umschreiben in

$$-\,\mathbf{N}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{N}} = \mathbf{H}\, g = \vec{\mathbf{H}}\, \dot{\kappa} \tag{2.16}$$

Setzen wir nun an

$$\mathbf{N}(\tau) = \mathbf{N}^t \cdot \mathrm{e}^{-\mathbf{U}(\tau)} \tag{2.17}$$

dann ist die Lösung der Anfangswertaufgabe gegeben durch

$$\mathbf{U}(\tau) = (\kappa^\tau - \kappa^t)\vec{\mathbf{H}} \tag{2.18}$$

Wegen $\det \exp \equiv \exp \mathrm{tr}$ folgt daraus

$$\det \mathbf{N}(\tau) = \det \mathbf{N}^t \, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\mathbf{U}(\tau)} \tag{2.19}$$

also Erhaltung der Determinante von $\mathbf{N}$, d.h. exakte plastische Volumenkonstanz, denn $\mathbf{U}(\tau)$ ist proportional zu $\mathbf{H}$ und damit ein Deviator — d.h. $\mathrm{tr}\,\mathbf{U}(\tau) = 0$. Am Ende des Inkrements ergibt sich

$$\mathbf{V} := \mathbf{U}^{t+\Delta t} = (\,\kappa^{t+\Delta t} - \kappa^t\,)\vec{\mathbf{H}} \tag{2.20}$$

und damit

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{V}} \tag{2.21}$$

und nach Betragsbildung

$$\kappa^{t+\Delta t} = \kappa^t + |\mathbf{V}| \tag{2.22}$$

sowie

$$\mathbf{N}^{t+\Delta t} = \mathbf{N}^t \cdot \mathrm{e}^{-\mathbf{V}} \tag{2.23}$$

Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ muss die Fließbedingung $\Phi = 0$ mit Φ gemäß (1.10) erfüllt sein, die sich nach Inversion von (1.12) — auf dem fünfdimensionalen Raum der symmetrischen Deviatoren — gemäß

$$\bar{\mathbf{S}}_e = \mathcal{B}^{-1} : \mathbf{H} \tag{2.24}$$

schreiben lässt als

$$\mathbf{H}^{t+\Delta t} : \mathcal{B}^{-1} : \mathbf{H}^{t+\Delta t} = \left(|\mathbf{H}|^{t+\Delta t}\right)^2 \vec{\mathbf{H}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{H}} = z(\kappa^{t+\Delta t})^2 \tag{2.25}$$

oder

$$|\mathbf{H}|^{t+\Delta t} = \frac{z(\kappa^{t+\Delta t})}{\sqrt{\vec{\mathbf{H}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{H}}}} = \frac{z(\kappa^t + |\mathbf{V}|)}{\sqrt{\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}}} \tag{2.26}$$

2.5 Entwicklung der tensoriellen inneren Variablen

Die Entwicklungsgleichung (1.13) der inneren Variablen $\mathbf{S}_{eB}$ lässt sich mit (1.14) auf folgende Form bringen:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{eB}}{\partial \kappa} = \mu \left(\vec{\mathbf{H}} - \frac{\mathbf{S}_{eB}}{y(\kappa)} \right) \tag{2.27}$$

und diese lineare Differentialgleichung gestattet eine Lösung mittels Quadraturen. Mit der Hilfsfunktion

$$Y(\kappa) := \int_{\kappa^t}^{\kappa} \frac{\mu \, d\hat{\kappa}}{y(\hat{\kappa})} \tag{2.28}$$

lässt sie sich nämlich umschreiben in

$$\mathrm{e}^{-Y(\kappa)} \frac{\partial}{\partial \kappa}\Big(\mathrm{e}^{Y(\kappa)} \mathbf{S}_{eB}(\kappa)\Big) = \mu \, \vec{\mathbf{H}} \tag{2.29}$$

Die rechte Seite ist aber — gemäß unserer zentralen Annahme — während des Inkrements konstant, so dass wir weiter erhalten

$$\int_{\kappa^t}^{\kappa^{t+\Delta t}} \frac{\partial}{\partial \kappa}\Big(\mathrm{e}^{Y(\kappa)} \mathbf{S}_{eB}(\kappa)\Big) \, d\kappa = \mu \, \vec{\mathbf{H}} \int_{\kappa^t}^{\kappa^{t+\Delta t}} \mathrm{e}^{Y(\kappa)} \, d\kappa \tag{2.30}$$

und daraus schließlich unter Beachtung von (2.21), (2.22)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{eB}^{t+\Delta t} &= \mathrm{e}^{-Y(\kappa^{t+\Delta t})} \Big(\mathbf{S}_{eB}^{t} + \mu \, \vec{\mathbf{H}} \int_{\kappa^t}^{\kappa^{t+\Delta t}} \mathrm{e}^{Y(\kappa)} \, d\kappa\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-Y(\kappa^{t}+|\mathbf{V}|)} \Big(\mathbf{S}_{eB}^{t} + \mu \, \vec{\mathbf{V}} \int_{\kappa^t}^{\kappa^{t}+|\mathbf{V}|} \mathrm{e}^{Y(\kappa)} \, d\kappa\Big) \end{aligned} \tag{2.31}$$

womit $\mathbf{S}_{eB}^{t+\Delta t}$ in Abhängigkeit von $\mathbf{V}$ vorliegt. Im Fall ohne Verfestigungseinfluss ($y \equiv const$) wird daraus speziell

$$\mathbf{S}_{eB}^{t+\Delta t} = \mathbf{S}_{eB}^{t} \, \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{y}|\mathbf{V}|} + y \, \vec{\mathbf{V}} \Big(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{y}|\mathbf{V}|}\Big) \tag{2.32}$$

2.6 Die Ermittlung von V

Aus (1.6), (1.8), (1.9) und mit der Abkürzung

$$\mathcal{C}' = \big(\mathcal{I} - \tfrac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\big) : \mathcal{C} \tag{2.33}$$

— worin $\mathcal{I}$ die identische Abbildung des Raumes der symmetrischen Tensoren auf sich selbst bedeutet — ergibt sich

$$\bar{\mathbf{S}}_e^{t+\Delta t} = \tfrac{1}{2}\mathcal{C}' : (\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{1})^{t+\Delta t} - \mathbf{S}_{eB}^{t+\Delta t} \tag{2.34}$$

Zugleich muss nach (2.24) gelten

$$\bar{\mathbf{S}}_e^{t+\Delta t} = \mathcal{B}^{-1} : |\mathbf{H}|^{t+\Delta t} \vec{\mathbf{H}} \tag{2.35}$$

Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke unter Beachtung von (2.23), (2.31), (2.21), (2.26) liefert die folgende nichtlineare Deviatorgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{V}) := {} & \tfrac{1}{2}\mathcal{C}' : \big(\mathrm{e}^{-\mathbf{V}} \cdot \mathbf{N}^{t\,T} \cdot \mathbf{C}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{N}^{t} \cdot \mathrm{e}^{-\mathbf{V}} - \mathbf{1}\big) \\ & - \mathrm{e}^{-Y(\kappa^{t}+|\mathbf{V}|)} \Big(\mathbf{S}_{eB}^{t} + \mu \, \vec{\mathbf{V}} \int_{\kappa^t}^{\kappa^{t}+|\mathbf{V}|} \mathrm{e}^{Y(\kappa)} \, d\kappa\Big) - z(\kappa^t + |\mathbf{V}|) \frac{\mathcal{B}^{-1} : \mathbf{V}}{\sqrt{\mathbf{V} : \mathcal{B}^{-1} : \mathbf{V}}} = 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

zur Ermittlung des symmetrischen Deviators $\mathbf{V}$.

2.7 Das Newton-Verfahren

Die nichtlineare Gleichung $\mathbf{G} = 0$ wollen wir iterativ lösen und gehen aus von einem Näherungswert $\mathbf{V}$. Das Newton-Verfahren gibt uns eine Verbesserung $\delta\mathbf{V}$ gemäß der linearen Approximation

$$0 = \mathbf{G}(\mathbf{V} + \delta\mathbf{V}) \approx \mathbf{G}(\mathbf{V}) + \delta\mathbf{G} \tag{2.37}$$

Die linearisierte Rechenvorschrift lautet also

$$\delta\mathbf{G} = \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{V}} : \delta\mathbf{V} =: \mathcal{A} : \delta\mathbf{V} = -\mathbf{G}(\mathbf{V}) \tag{2.38}$$

Für $\delta\mathbf{G}$ finden wir

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{G} = {} & \mathcal{C}' : \operatorname{sym}\Big(\mathrm{e}^{-\mathbf{V}} \cdot \mathbf{N}^{t\,T} \cdot \mathbf{C}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{N}^{t} \cdot \delta\big(\mathrm{e}^{-\mathbf{V}}\big)\Big) \\
& + \mathrm{e}^{-Y(\kappa^t+|\mathbf{V}|)} \frac{\mu}{y(\kappa^t + |\mathbf{V}|)} \left(\mathbf{S}^t_{eB} + \mu\,\vec{\mathbf{V}} \int_{\kappa^t}^{\kappa^t+|\mathbf{V}|} \mathrm{e}^{Y(\kappa)}\, d\kappa\right) \delta|\mathbf{V}| \\
& - \mu \mathrm{e}^{-Y(\kappa^t+|\mathbf{V}|)} \int_{\kappa^t}^{\kappa^t+|\mathbf{V}|} \mathrm{e}^{Y(\kappa)}\, d\kappa\; \delta\vec{\mathbf{V}} - \mu\,\vec{\mathbf{V}}\,\delta|\mathbf{V}| \\
& - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{V} : \mathcal{B}^{-1} : \mathbf{V}}} \Bigg(z'(\kappa^t + |\mathbf{V}|)\, \mathcal{B}^{-1} : \mathbf{V}\ \delta|\mathbf{V}| \\
& \qquad + z(\kappa^t + |\mathbf{V}|)\Big(\mathcal{B}^{-1} : \delta\mathbf{V} - \frac{\mathcal{B}^{-1} : \mathbf{V}}{\mathbf{V} : \mathcal{B}^{-1} : \mathbf{V}}\ \mathbf{V} : \mathcal{B}^{-1} : \delta\mathbf{V}\Big)\Bigg)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Nun ergeben sich aber $\delta|\mathbf{V}|$ und $\delta\vec{\mathbf{V}}$ aus

$$\delta\mathbf{V} = \delta(|\mathbf{V}|\vec{\mathbf{V}}) = \delta|\mathbf{V}|\ \vec{\mathbf{V}} + |\mathbf{V}|\,\delta\vec{\mathbf{V}} \tag{2.40}$$

durch Doppelpunktmultiplikation mit $\vec{\mathbf{V}}$, also

$$\delta|\mathbf{V}| = \vec{\mathbf{V}} : \delta\mathbf{V} \tag{2.41}$$

und

$$\delta\vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{|\mathbf{V}|}(\delta\mathbf{V} - \vec{\mathbf{V}}\,\vec{\mathbf{V}} : \delta\mathbf{V}) \tag{2.42}$$

Die Berechnung der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{-\mathbf{V}}$ und ihres Zuwachses

$$\delta\big(\mathrm{e}^{-\mathbf{V}}\big) = \frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathbf{V}}}{\partial\mathbf{V}} : \delta\mathbf{V} \tag{2.43}$$

wird in Teil III ausgearbeitet. Damit lässt der Tensor 4. Stufe $\mathcal{A}$ sich aus (2.39) entnehmen.

2.8 Zusammenfassung

Im Rahmen der sog. multiplikativen Plastizität haben wir Stoffgleichungen diskutiert, die sowohl elastische als auch plastische genuine Anisotropie aufweisen, und deren plastische Anisotropie sich im Laufe des Verformungsprozesses zusätzlich durch kinematische Verfestigung ändert. Neben dem Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{C}$ als äußerer Zustandsvariabler weist das Material als innere Zustandsvariable den inversen Tensor $\mathbf{N}$ des plastischen Anteils der Umplatzierung, die Gitter-Rückspannung $\mathbf{S}_{eB}$ und einen skalaren Verfestigungsparameter κ auf.
Wie gezeigt wurde, genügt zur Beschreibung der plastischen Verformung in jedem Inkrement die Kenntnis eines symmetrischen Deviators $\mathbf{V}$. Dieser beschreibt gemäß (2.23) die Aktualisierung von $\mathbf{N}$, welche auch bei beliebig großer Schrittweite die plastische Volumenkonstanz exakt erfüllt, und gestattet ferner nach (2.22) und (2.31) die Aktualisierung des skalaren Verfestigungsparameters κ bzw. der Rückspannung $\mathbf{S}_{eB}$.
Zur Ermittlung von $\mathbf{V}$ stehen die fünf nichtlinearen skalaren Komponentengleichungen der Tensorgleichung (2.36) zur Verfügung, deren Lösung mit dem Newton-Verfahren dargelegt worden ist.

Kapitel 3

Vereinfachungen im Falle der Isotropie

Die Bestimmungsgleichung (2.36) für $\mathbf{V}$ ist entstanden aus der Gleichsetzung zweier Ausdrücke für $\bar{\mathbf{S}}_e$, nämlich des elastischen und des Fließgesetzes:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{2}\mathcal{C}' : (\mathrm{e}^{-\mathbf{V}} \cdot \mathbf{N}^{t\,T} \cdot \mathbf{C}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{N}^{t} \cdot \mathrm{e}^{-\mathbf{V}} - \mathbf{1}) \\
= \ & \mathbf{S}_{eB}^{t+\Delta t} + \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}\ |\mathbf{H}|^{t+\Delta t}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Nun ist aber nach (1.5), (2.23)

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{-\mathbf{V}} \cdot \mathbf{N}^{t\,T} \cdot \mathbf{C}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{N}^{t} \cdot \mathrm{e}^{-\mathbf{V}} \\
= \ & (\mathbf{N}^{t+\Delta t})^{T} \cdot \mathbf{C}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{N}^{t+\Delta t} \\
= \ & \mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e^{t+\Delta t} \\
\approx \ & \mathbf{1} + \ln(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e^{t+\Delta t}) \\
= \ & \mathbf{1} + \ln(\mathrm{e}^{-\mathbf{V}} \cdot \mathbf{N}^{t\,T} \cdot \mathbf{C}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{N}^{t} \cdot \mathrm{e}^{-\mathbf{V}})
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Die getroffene Näherung ist zulässig, weil die elastische Verzerrung $\mathbf{E}_e$ sehr klein gegen $\mathbf{1}$ ist. Folglich lässt (3.1) sich mit dem Prädiktorwert des elastischen Cauchy-Green-Tensors

$$\mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}} := \mathbf{N}^{t\,T} \cdot \mathbf{C}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{N}^{t} \tag{3.3}$$

auch schreiben als

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{C}' : \ln(\mathrm{e}^{-\mathbf{V}} \cdot \mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathbf{V}}) = \mathbf{S}_{eB}^{t+\Delta t} + \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}\,|\mathbf{H}|^{t+\Delta t} \tag{3.4}$$

und wie folgt umformen:

$$\ln(\mathrm{e}^{-\mathbf{V}} \cdot \mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathbf{V}}) = 2\mathcal{C}^{-1} : \left(\alpha\mathbf{1} + \mathbf{S}_{eB}^{t+\Delta t} + \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}\,|\mathbf{H}|^{t+\Delta t}\right) \tag{3.5}$$

$$\mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}} = \mathrm{e}^{\mathbf{V}} \cdot \exp\left(2\mathcal{C}^{-1} : \left(\alpha\mathbf{1} + \mathbf{S}_{eB}^{t+\Delta t} + \mathcal{B}^{-1} : \vec{\mathbf{V}}\,|\mathbf{H}|^{t+\Delta t}\right)\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{V}}. \tag{3.6}$$

Wenn das elastische und das plastische Verhalten isotrop sind, also gilt

$$\mathcal{C}^{-1} = \frac{1}{2G}\left(\mathcal{I} - \frac{\nu}{1+\nu}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right), \qquad \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\,, \qquad \mathbf{S}_{eB} \equiv 0 \tag{3.7}$$

dann wird daraus speziell

$$\mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}} = \mathrm{e}^{\mathbf{V}} \cdot \exp\left(\frac{1}{G}\Big(\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,\alpha\mathbf{1} + \vec{\mathbf{V}}\,|\mathbf{H}|^{t+\Delta t}\Big)\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{V}}. \tag{3.8}$$

und aus (2.26)

$$|\mathbf{H}|^{t+\Delta t} = z(\kappa^t + |\mathbf{V}|) \tag{3.9}$$

Aus Gleichung (3.8) ersieht man, dass die Tensoren $\mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}}$ und $\mathbf{V}$ im isotropen Fall koaxial sind. Die Gleichung lässt sich daher elementar logarithmieren, und wir erhalten

$$\big(\ln \mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}}\big)' = \left(2|\mathbf{V}| + \frac{1}{G}\,z(\kappa^t + |\mathbf{V}|)\right)\vec{\mathbf{V}} \tag{3.10}$$

und daraus

$$\vec{\mathbf{V}} = \overrightarrow{\big(\ln \mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}}\big)'} \tag{3.11}$$

und

$$|\big(\ln \mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}}\big)'| = 2|\mathbf{V}| + \frac{1}{G}\,z(\kappa^t + |\mathbf{V}|) \tag{3.12}$$

Die Richtung von $\mathbf{V}$ lässt sich also im isotropen Falle aus dem bekannten Tensor $\mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}}$ gemäß Gleichung (3.11) unmittelbar ermitteln, und zur Bestimmung des Betrages von $\mathbf{V}$ ist nur noch die einzige skalare nichtlineare Gleichung (3.12) iterativ zu lösen.

Im isotropen Fall wird der Deviator der Prädiktor-Gitterspannung gemäß (2.13) zu

$$(\mathbf{S}_e^{\mathrm{pre}})' = \tfrac{1}{2}\mathcal{C}' : \big(\mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}} - \mathbf{1}\big) = G\,(\mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}})' \tag{3.13}$$

Wenn man — wie bei Projektionsverfahren in der Plastizität kleiner Verformungen üblich — die Richtung der plastischen Verformung mit der Richtung des Prädiktor-Spannungsdeviators identifizieren möchte, dann würde das

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{V}} = (\mathbf{S}_e^{\vec{\mathrm{pre}}})' = (\mathbf{C}_e^{\vec{\mathrm{pre}}})' \tag{3.14}$$

bedeuten. Ein Vergleich mit (3.11) zeigt, dass jetzt der Deviator von $\ln \mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}}$ durch den Deviator von $\mathbf{C}_e^{\mathrm{pre}}$ ersetzt worden ist. Die Unterschiede sind zwar vernachlässigbar, falls die elastischen Prädiktor-Verzerrungen klein sind. Das muss aber — im Gegensatz zu den realen elastischen Verzerrungen — keineswegs der Fall sein. Will man die Richtung von $\mathbf{V}$ in jedem Falle aus der Richtung des Deviators der Prädiktor-Spannung entnehmen — was eigentlich keinen Vorteil bietet — dann kann man den elastischen Prädiktor mit einem logarithmischen Stoffgesetz bilden, also (1.8) durch das — bei kleinen elastischen Verzerrungen äquivalente — Gesetz

$$\mathbf{S}_e = \mathcal{C} : \tfrac{1}{2} \ln(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}_e) \tag{3.15}$$

ersetzen. Das ist der Kern einer Idee von Miehe ([3]).
Im anisotropen Falle ist das Logarithmieren von (3.6) leider nicht ebenso elementar möglich, denn die auftretenden Tensoren sind nicht koaxial. Die Richtung von $\mathbf{V}$ ist daher nicht von vornherein angebbar, so dass die Iteration von fünf nichtlinearen skalaren Gleichungen sich wohl nicht vermeiden lässt.

Literatur

[1] A. Krawietz, Materialtheorie, Springer 1986

[2] A. Krawietz, Passivität, Konvexität und Normalität bei elastisch-plastischem Material, Ing.-Archiv 51 (1981) 257-274

[3] C. Miehe & E. Stein, A Canonical Model of Multiplicative Elasto-Plasticity: Formulation and Aspects of the Numerical Implementation, IBNM-Bericht 92/3, Universität Hannover