## Zu 5. Kinetik: Ableitung der Gesetze aus den Axiomen ( Blatt 1 )

- ### Massenpunkt:

**Axiom** (Newtonsches Grundgesetz):
$$\vec{F}_{res} = m\,\vec{a}\ . \tag{1}$$

$\vec{F}_{res}$: Gemäß dem (bereits in der Statik eingeführten) Parallelogramm**axiom** gebildete resultierende Kraft auf den Massenpunkt
$\vec{a}$: Beschleunigung des Massenpunktes in einem Inertialsystem (Für Ingenieurzwecke genügt in der Regel ein erdfestes Bezugssystem)

Umdeutung als ,,kinetische Kraftgleichgewichtsbedingung" im Sinne von d'Alembert:
$$\vec{F}_{gesamt} = \vec{F}_{res} + \vec{F}_T = 0 \qquad \text{mit der Trägheitskraft} \qquad \vec{F}_T = -m\vec{a}\ . \tag{2}$$

- ### System von n Massenpunkten:

Es bezeichnet $\vec{F}_i^{(a)}$ die auf den Massenpunkt mit der Nummer i wirkende äußere Kraft und $\vec{F}_{ik}$ die vom Massenpunkt k auf den Massenpunkt i ausgeübte innere Kraft. Gemäß dem (bereits in der Statik eingeführten) **Axiom** actio = reactio ist
$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}\ . \tag{3}$$

Für die einzelnen Massenpunkte gilt das Newtonsche Grundgesetz in der Form
$$\vec{F}_i^{(a)} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} = m_i\vec{a}_i\,, \qquad i = 1, ..., n\ . \tag{4}$$

Summation dieser n Gleichungen gibt
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(a)} = \vec{F}_{res} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i\ . \tag{5}$$

Die Doppelsumme über die inneren Kräfte entfällt, weil sich je zwei von ihnen gemäß (3) tilgen.

Jetzt multiplizieren wir (4) vektoriell mit dem Ortsvektor $\vec{r}_i$ des Massenpunktes i, also
$$\vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{(a)} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik}\right) = \vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i\,, \qquad i = 1, ..., n\,, \tag{6}$$

und Summation dieser n Gleichungen gibt
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} = \vec{M}_{res\,\text{„}O\text{“}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i\ . \tag{7}$$

Die Beiträge der inneren Kräfte haben wir wieder fortgelassen, denn wir machen die **Einschränkung**, daß die Kraft $\vec{F}_{ik}$ in der Verbindungslinie der Massenpunkte i und k wirkt (Zentralkraft). Die zu dieser Verbindungslinie gehörigen beiden Kreuzprodukte

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} + \vec{r}_k \times \vec{F}_{ki} = (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ik} \tag{8}$$

tilgen sich, denn der Verbindungsvektor $\vec{r}_i - \vec{r}_k$ und der Kraftvektor $\vec{F}_{ik}$ sind parallel.

Kinetisches Gleichgewicht des Massenpunktsystems

Umdeutung von (5) und (7) im Sinne von d'Alembert liefert für das Massenpunktsystem eine kinetische **Kraftgleichgewichtsbedingung**

$$\vec{F}_{gesamt} = \sum_{i=1}^{n} \left( \vec{F}_i^{(a)} - m_i \vec{a}_i \right) = 0 \tag{9}$$

und eine kinetische **Momentengleichgewichtsbedingung**

$$\vec{M}_{gesamt\,„O“} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i^{(a)} - m_i \vec{a}_i \right) = 0\ . \tag{10}$$

Impulssatz und Impulsmomentensatz

Beachtet man den kinematischen Zusammenhang — Punkte bedeuten Zeitableitungen —

$$\vec{a} = \vec{v}^{\;\bullet} = \vec{r}^{\;\bullet\bullet} \tag{11}$$

und die zeitliche Unveränderlichkeit der Masse, so wird aus (5) der **Impulssatz**

$$\vec{F}_{res} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i^{\;\bullet} = \vec{p}^{\;\bullet} \qquad \text{mit} \qquad \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\ . \tag{12}$$

Der Vektor $\vec{p}$ heißt Impuls oder Bewegungsgröße.

Entsprechend wird aus (7) der **Impulsmomentensatz**

$$\vec{M}_{res\,„O“} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i^{\;\bullet} = \vec{L}_{„O“}^{\bullet} \qquad \text{mit} \qquad \vec{L}_{„O“} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\ . \tag{13}$$

Der Vektor $\vec{L}_{„O“}$ heißt Impulsmoment, Drehimpuls oder Drall, bezogen auf den raumfesten Koordinatenursprung „O“. Bei der Herleitung ist beachtet worden, daß das Vektorprodukt $\vec{r} \times \vec{v}$ nach der Produktregel zu differenzieren ist, also

$$(\vec{r} \times \vec{v})^{\;\bullet} = \vec{r}^{\;\bullet} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{v}^{\;\bullet} = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{v}^{\;\bullet} = \vec{r} \times \vec{v}^{\;\bullet}\ . \tag{14}$$

Der Term $\vec{v} \times \vec{v}$ verschwindet als Vektorprodukt paralleler Vektoren.

Als Spezialfälle ergeben sich folgende **Erhaltungssätze für Impuls und Impulsmoment**:

Wirkt auf ein Massenpunktsystem keine resultierende äußere Kraft, so bleibt sein Impuls konstant.

Wirkt auf ein Massenpunktsystem kein resultierendes Moment der äußeren Kräfte, so bleibt sein Impulsmoment konstant.

## Zu 5. Kinetik: Ableitung der Gesetze aus den Axiomen ( Blatt 2 )

Bezugnahme auf den Schwerpunkt

Der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) des Massenpunktsystems ist definiert durch die Gleichung

$$\vec{r}_S \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i \; . \tag{15}$$

Der Impuls läßt sich also schreiben als

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^{\,\bullet} = \vec{r}_S^{\,\bullet} \sum_{i=1}^{n} m_i = \vec{v}_S \sum_{i=1}^{n} m_i = m\,\vec{v}_S \; , \tag{16}$$

und aus dem Impulssatz (12) läßt sich der **Schwerpunktsatz** gewinnen:

$$\vec{F}_{res} = \vec{p}^{\;\bullet} = m\,\vec{v}_S^{\,\bullet} = m\,\vec{a}_S \; . \tag{17}$$

Die Analogie zur Bewegungsgleichung (1) eines einzelnen Massenpunktes ist offenkundig. Der Schwerpunkt des Massenpunktsystems bewegt sich demnach so, als ob die gesamte Masse und der Angriff aller äußeren Kräfte in diesem Punkt konzentriert wären.

Um den Impulsmomentensatz umzuschreiben, zerlegen wir die Ortsvektoren der einzelnen Massenpunkte gemäß

$$\vec{r}_i = \vec{r}_S + \vec{q}_i \; , \qquad i = 1, ..., n \; . \tag{18}$$

Das auf „O“bezogene Impulsmoment wird dann

$$\vec{L}_{„O“} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_S + \vec{q}_i) \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_S \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_S \times \vec{p} + \vec{L}_{„S“} \tag{19}$$

und das auf „O“bezogene Moment der äußeren Kräfte

$$\vec{M}_{res„O“} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_S + \vec{q}_i) \times \vec{F}_i^{(a)} = \vec{r}_S \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i \times \vec{F}_i^{(a)} = \vec{r}_S \times \vec{F}_{res} + \vec{M}_{res„S“} \; . \tag{20}$$

Einsetzen in (13) gibt

$$\underline{\vec{r}_S \times \vec{F}_{res}} + \vec{M}_{res„S“} = \left(\vec{r}_S \times \vec{p} + \vec{L}_{„S“}\right)^{\bullet} = \underline{\vec{r}_S \times \vec{p}^{\;\bullet}} + \underbrace{\vec{r}_S^{\,\bullet} \times \vec{p}} + \vec{L}_{„S“}^{\,\bullet} \; . \tag{21}$$

Die unterstrichenen Terme tilgen sich wegen (12), und der unterklammerte Ausdruck ist als Vektorprodukt der parallelen Vektoren $\vec{r}_S^{\,\bullet} = \vec{v}_S$ und $\vec{p} = m\,\vec{v}_S$ — siehe (16) — gleich Null. Es verbleibt der **Impulsmomentensatz** — auch Momentensatz oder Drallsatz genannt — in der Fassung

$$\vec{M}_{res\,„S“} = \vec{L}_{„S“}^{\,\bullet} \; , \tag{22}$$

die formal ebenso gebaut ist wie (13), jedoch nicht auf einen raumfesten Punkt „$O$“, sondern auf den bewegten Schwerpunkt „$S$“ Bezug nimmt.

Arbeitssatz und Energiesatz

Multiplizieren wir (4) skalar mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_i$ des Massenpunktes i, also

$$\vec{F}_i^{(a)} \cdot \vec{v}_i + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} \cdot \vec{v}_i = m_i\, \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i\,, \qquad i = 1, ..., n\,, \tag{23}$$

und summieren diese n Gleichungen, so finden wir die **Leistungsbilanz** des Massenpunktsystems:

$$P^{(a)} = P^{(i)} + E_{kin}^{\bullet}\,. \tag{24}$$

Darin bedeuten

$$P^{(a)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \vec{v}_i \qquad \text{und} \qquad P^{(i)} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} \cdot \vec{v}_i \tag{25}$$

die Leistung der am Massenpunktsystem angreifenden äußeren Kräfte bzw. die Leistung der inneren Kräfte (Verformungsleistung), während der letzte Summand die zeitliche Ableitung der kinetischen Energie

$$E_{kin} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\, m_i\, v_i^2 \tag{26}$$

beschreibt. Wegen $\quad v^2 = |\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad (v^2)^{\bullet} = \vec{v}^{\,\bullet} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}^{\,\bullet} = 2\,\vec{v}^{\,\bullet} \cdot \vec{v} = 2\,\vec{a} \cdot \vec{v} \quad$ gilt nämlich

$$E_{kin}^{\bullet} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i\,. \tag{27}$$

Zur Deutung der Verformungsleistung stellen wir den Vektor vom Massenpunkt i zum Massenpunkt k und die von k auf i ausgeübte Zentralkraft mittels Betrag und Richtung dar als

$$\vec{r}_k - \vec{r}_i = d_{ik}\, \vec{e}_{ik} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{F}_{ik} = F_{ik}\, \vec{e}_{ik}\,. \tag{28}$$

Der Beitrag der zwischen i und k wirkenden Kräfte zur Verformungsleistung wird damit

$$-\vec{F}_{ik} \cdot \vec{v}_i - \vec{F}_{ki} \cdot \vec{v}_k = \vec{F}_{ik} \cdot (\vec{v}_k - \vec{v}_i) = \vec{F}_{ik} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_i)^{\bullet} = F_{ik}\vec{e}_{ik} \cdot (d_{ik}^{\bullet}\, \vec{e}_{ik} + d_{ik}\, \vec{e}_{ik}^{\,\bullet}) = F_{ik}\, d_{ik}^{\bullet}\,. \tag{29}$$

(Dabei wurden die für Einheitsvektoren gültigen Beziehungen $\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$ und $\vec{e}^{\,\bullet} \cdot \vec{e} = 0$ benutzt.)
Er ist also proportional zur Änderung des Abstandes $d_{ik}$ der beiden Massenpunkte und verschwindet, wenn dieser Abstand konstant bleibt.

Integration der Leistungsbilanz (24) zwischen den Zeitpunkten $t_1$ und $t_2$ liefert den **Arbeitssatz**

$$W_{12}^{(a)} = W_{12}^{(i)} + E_{kin}(t_2) - E_{kin}(t_1) \qquad \text{mit} \qquad W_{12}^{(a)} = \int_{t_1}^{t_2} P^{(a)} dt\,, \quad W_{12}^{(i)} = \int_{t_1}^{t_2} P^{(i)} dt\,. \tag{30}$$

Die im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ geleistete äußere Arbeit wird also zum einen Teil zur Verformung und zum anderen Teil zur Änderung der kinetischen Energie des Massenpunktsystems verbraucht.

Wenn die äußeren Kräfte konservativ sind ( z.B. Gewichtskräfte ), dann läßt ihre Arbeit sich als Abnahme ihrer potentiellen Energie $E_{pot}$ darstellen. Die inneren Kräfte sind konservativ, wenn die Massenpunkte untereinander durch Federn verbunden sind. Ihre Arbeit ist dann gleich dem Zuwachs der elastischen Formänderungsenergie $E_{def}$. Sind innere und äußere Kräfte konservativ, dann wird der Arbeitssatz zum Erhaltungssatz der mechanischen Energie ( **Energiesatz** ):

$$E_{pot} + E_{def} + E_{kin} = const. \tag{31}$$

## Zu 5. Kinetik: Ableitung der Gesetze aus den Axiomen ( Blatt 3 )

### • Körper:

Einen kontinuierlichen Körper können wir uns angenähert denken durch ein System von Massenpunkten, und die Annäherung wird offenbar um so besser, je größer wir dabei die Zahl der Massenpunkte wählen. Im Grenzübergang zu unendlich vielen Massenpunkten haben wir schließlich den Impuls, das Impulsmoment und die kinetische Energie darzustellen durch folgende Integrale:

$$\vec{p} = \int_m \vec{v}\,dm = m\,\vec{v}_S\,, \qquad \vec{L}_{\text{„}O\text{“}} = \int_m \vec{r} \times \vec{v}\,dm\,, \qquad E_{kin} = \int_m \frac{1}{2}\,v^2\,dm\,. \tag{32}$$

Von den für Massenpunktsysteme abgeleiteten Gesetzen gilt die kinetische Momentengleichgewichtsbedingung bzw. der Impulsmomentensatz nur für Systeme, deren innere Kräfte Zentralkräfte sind. Man trifft nun die Annahme, daß Körper sich wie solche Massenpunktsysteme mit Zentralkräften verhalten. Diese Annahme stellt ein **Axiom** dar (Boltzmannsches Axiom). Es gelten somit alle für Massenpunktsysteme mit Zentralkräften hergeleiteten Gesetze auch für Körper.

Aus der kinetischen Momentengleichgewichtsbedingung für ein Materialelement erschließt man dann, daß der Spannungstensor nicht nur in der Statik, sondern auch in der Kinetik symmetrisch ist, also die zugeordneten Schubspannungen gleich sind ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ).

Anstelle des Newtonschen Grundgesetzes und der Zentralkraftannahme kann man auch den Impulssatz und den Impulsmomentensatz oder die kinetischen Gleichgewichtsbedingungen als die beiden grundlegenden Axiome der Kinetik der Körper wählen.

Die Kinetik des Massenpunktes wurde von Newton, die der Körper von Euler begründet.

Die Gesetze der Kinetik (Impulssatz, Impulsmomentensatz, Arbeitssatz) gelten unabhängig vom Material für Körper aller Art — für Festkörper (starr oder deformierbar, elastisch oder plastisch) ebenso wie für Fluide (Flüssigkeiten und Gase). Der Übergang vom Arbeitssatz zum Energiesatz ist nur für starre oder elastische Körper unter konservativen äußeren Kräften zulässig.

### • Starre Körper:

Für starre Körper gelten folgende Vereinfachungen:

1. Beim starren Massenpunktsystem bleiben die Abstände aller Punkte konstant, und die Verformungsleistung ist daher gleich Null. Ebenso vereinfacht die Leistungsbilanz beim starren Körper sich zu
$$P^{(a)} = \overset{\bullet}{E}_{kin}\,. \tag{33}$$
Sind die äußeren Kräfte konservativ, so gilt der Energiesatz in der Form
$$E_{pot} + E_{kin} = const. \tag{34}$$
2. Das Geschwindigkeitsfeld des starren Körpers läßt sich darstellen in der Form
$$\vec{v} = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{q}\,. \tag{35}$$
Die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{v}_S$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ entsprechen den sechs kinematischen Freiheitsgraden der Translation und der Rotation. Führt man ein spezielles kartesisches

Koordinatensystem so ein, daß der Ursprung im Schwerpunkt liegt und die z-Achse in die Richtung des momentanen Winkelgeschwindigkeitsvektors zeigt, so gilt $\vec{q} = (x, y, z)$, $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ und

$$\vec{\omega}\times\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\omega y,\ \omega x,\ 0)\,, \quad \vec{q}\times(\vec{\omega}\times\vec{q}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \omega\,(-xz,\ -yz,\ x^2+y^2) \tag{36}$$

und folglich

$$\vec{L}_{„S“} = \int_m \vec{q}\times\vec{v}\,dm = \underline{\int_m \vec{q}\,dm}\times\vec{v}_S + \int_m \vec{q}\times(\vec{\omega}\times\vec{q})\,dm = \omega\,(-J_{xz„S“},\ -J_{yz„S“},\ J_{z„S“})\,. \tag{37}$$

Der unterstrichene Term entfällt, weil der Ortsvektor $\vec{q}$ vom Schwerpunkt ausgeht. Es bedeuten

$$J_{z„S“} = \int_m (x^2+y^2)\,dm\,, \qquad J_{xz„S“} = \int_m xz\,dm\,, \qquad J_{yz„S“} = \int_m yz\,dm \tag{38}$$

das axiale Trägheitsmoment und die beiden Deviationsmomente bezüglich der z-Achse durch den Schwerpunkt. Ist die momentane Drehachse z eine Hauptträgheitsachse, dann stellt das Impulsmoment bezüglich des Schwerpunkts sich einfacher dar als

$$\vec{L}_{„S“} = \omega J_{z„S“}\,(0,0,1) = J_{z„S“}\vec{\omega}\,. \tag{39}$$

Die kinetische Energie berechnet sich gemäß

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \int_m \frac{1}{2}v^2\,dm = \int_m \left[\frac{1}{2}\vec{v}_s\cdot\vec{v}_S + \vec{v}_S\cdot(\vec{\omega}\times\vec{q}) + \frac{1}{2}(\vec{\omega}\times\vec{q})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{q})\right]dm \\ &= \frac{1}{2}v_s^2\int_m dm + \vec{v}_S\cdot\left(\vec{\omega}\times\underline{\int_m \vec{q}\,dm}\right) + \frac{1}{2}\int_m\left[(-\omega y)^2+(\omega x)^2\right]dm = \frac{1}{2}m\,v_s^2 + \frac{1}{2}J_{z„S“}\,\omega^2\,. \end{aligned} \tag{40}$$

3. Will man die Drehung um einen festen Punkt „O“oder um eine durch diesen gehende feste Achse beschreiben, so legt man den Koordinatenursprung in den Punkt „O“und läßt die z-Achse mit der momentanen oder festen Drehachse zusammenfallen. Die Geschwindigkeit stellt sich dann dar als

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}\,, \tag{41}$$

und das Impulsmoment bezüglich des Punktes „O“berechnet sich zu

$$\vec{L}_{„O“} = \int_m \vec{r}\times\vec{v}\,dm = \int_m \vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\,dm = \omega\,(-J_{xz„O“},\ -J_{yz„O“},\ J_{z„O“})\,. \tag{42}$$

Die Trägheits- und Deviationsmomente beziehen sich diesmal auf die Drehachse z durch den Punkt „O“, der im allgemeinen nicht mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Für die kinetische Energie erhält man

$$E_{kin} = \int_m \frac{1}{2}v^2\,dm = \int_m \frac{1}{2}(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})\,dm = \frac{1}{2}J_{z„O“}\,\omega^2\,. \tag{43}$$

## Zu 5.3.1 Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse

### Gegenüberstellung der Grundbegriffe und Gesetze für die Bewegung eines Massenpunktes und die Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse

| Bewegung eines Massenpunktes: | Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse: |
|---|---|
| Zeit $t$ | Zeit $t$ |
| Bahnort $s$ | Drehwinkel $\varphi$ |
| Bahngeschwindigkeit $v = \dot{s}$ | Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ |
| Bahnbeschleunigung $a_t = \dot{v} = \ddot{s}$ | Winkelbeschleunigung $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ |
| Masse $m$ | Trägheitstensor $\mathbf{J}$<br>Axiales Massenträgheitsmoment $J_z$ |
| Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$<br>Komponente in Richtung der Bahntangente $t$:<br>$p = mv$ | Impulsmoment $\vec{L}_{„O“} = \mathbf{J} \cdot \vec{\omega}$ *)<br>Komponente in Richtung der Drehachse $z$ **):<br>$L_{z\,„O“} = J_z\, \omega$ |
| Resultierende Kraft $\vec{F}$<br>Komponente in Richtung der Bahntangente $t$: $F_t$ | Resultierendes Moment $\vec{M}_{„O“}$<br>Komponente in Richtung der Drehachse $z$: $M_z$ |
| Impulssatz $\vec{F} = \vec{p}^{\bullet}$<br>Komponente in Richtung der Bahntangente $t$:<br>$\underline{F_t} = \dot{p} = m\,\dot{v} = \underline{m\,a_t}$ | Impulsmomentensatz $\vec{M}_{„O“} = \vec{L}_{„O“}^{\bullet}$<br>Komponente in Richtung der Drehachse $z$:<br>$\underline{M_z} = L_{z\,„O“}^{\bullet} = J_z\,\dot{\omega} = \underline{J_z \alpha}$ |
| Zugehörige Integralform:<br>$\int_{t_1}^{t_2} F_t dt = m\,v_2 - m\,v_1$ | $\int_{t_1}^{t_2} M_z dt = J_z\,\omega_2 - J_z\,\omega_1$ |
| Zugehöriger Erhaltungssatz:<br>$m\,v = const.$ | $J_z\,\omega = const.$ |
| Leistung $P = F_t\, v$ | $P = M_z\, \omega$ |
| Arbeit $W = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds$ | $W = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$ |
| Kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ | $E_{kin} = \frac{1}{2} J_z \omega^2$ |
| Arbeitssatz $W_{12}^{(a)} = E_{kin}(t_2) - E_{kin}(t_1)$ | |
| Elastische Formänderungsenergie in Federn:<br>$E_{def} = \frac{1}{2}\, c\, s^2$ | $E_{def} = \frac{1}{2}\, c_d\, \varphi^2$ |

*)„$O$“ ist ein raumfester Punkt auf der Drehachse. **) Wenn die Drehachse keine Hauptträgheitsachse des Körpers ist, besitzt das Impulsmoment auch Komponenten senkrecht zur Drehachse.