

Verschiedenartige Formulierungen von Gleichgewichtsaussagen

Der Gaußsche Integralsatz

Dieser Satz wird im Folgenden vielfach als Hilfsmittel benötigt. Im Dreidimensionalen lässt er sich formal schreiben als

$$\int_V \nabla dV = \int_A \mathbf{n} dA \quad (1)$$

und ermöglicht die Umwandlung eines Integrals über ein Volumen V in ein Integral über die (gegebenenfalls aus mehreren Teilen bestehende) Oberfläche A dieses Volumens, deren örtlicher nach außen gerichteter Normaleneinheitsvektor mit $\mathbf{n}$ bezeichnet ist. Mit einem Vektorfeld $\mathbf{v}$ und einem Tensorfeld $\mathbf{T}$ ergeben sich beispielsweise folgende Anwendungen:

$$\int_V \text{grad } \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{v} \otimes \nabla dV = \int_A \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} dA, \quad (2)$$

$$\int_V \text{div } \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \nabla dV = \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (3)$$

$$\int_V \text{div } \mathbf{T} dV = \int_V \mathbf{T} \cdot \nabla dV = \int_A \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (4)$$

Bei Beschränkung auf das Eindimensionale ist der Gaußsche Satz nichts anderes als der Hauptsatz der Integralrechnung. Dann ist das Integrationsgebiet nämlich ein Intervall $[x_1, x_2]$ auf der x -Achse, und die Normaleneinheitsvektoren auf der linken und rechten Begrenzung werden durch -1 bzw. $+1$ wiedergegeben. Für jeden Funktionsausdruck $\Phi(x)$ gilt dann

$$\int_{x=x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \Phi(x) dx = [\Phi(x)]_{x_1}^{x_2} = (+1) \cdot \Phi(x_2) + (-1) \cdot \Phi(x_1). \quad (5)$$

Der Impulssatz

Auf ein Massenelement $dm = \varrho dV$ eines sich beschleunigt bewegenden dreidimensionalen Körpers wirken die Massenkraft $\mathbf{b} dm$ (z.B. Gravitation) und die Trägheitskraft $-\mathbf{a} dm$ ein ($\mathbf{a}$ ist die Beschleunigung gegenüber einem Inertialrahmen) und auf ein Oberflächenelement dA mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ nach dem Satz

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (6)$$

von Cauchy über den Zusammenhang von Spannungsvektor und Spannungstensor die Oberflächenkraft $\mathbf{t} dA = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA$. Nach dem Prinzip des kinetischen Gleichgewichts von d'Alembert muss die Resultierende dieser auf den Körper einwirkenden äußeren Kräfte gleich Null sein, also

$$\int_m (\mathbf{b} - \mathbf{a}) dm + \int_A \mathbf{t} dA = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Anwendung des Gaußschen Satzes liefert

$$\int_A \mathbf{t} dA = \int_A \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \mathbf{T} \cdot \nabla dV, \quad (8)$$

und damit wird aus dem Prinzip von d'Alembert

$$\int_V (\mathbf{T} \cdot \nabla + \varrho \mathbf{b} - \varrho \mathbf{a}) dV = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Da diese Aussage für jeden beliebigen Teilkörper eines Gesamtkörpers ebenfalls richtig sein soll, muss der Integrand identisch verschwinden, d.h., es gilt die Feldgleichung des kinetischen Gleichgewichts, auch als lokale Impulsbilanz oder Impulssatz in differentieller Form bezeichnet,

$$\mathbf{T} \cdot \nabla + \varrho \mathbf{b} = \varrho \mathbf{a}. \quad (10)$$

Deutung: Bezogen auf eine Volumeneinheit stehen links die einwirkenden Kräfte und rechts Masse mal Beschleunigung.

Eine andere Umformung der Gleichung (7) gibt

$$\int_m \mathbf{b} dm + \int_A \mathbf{t} dA = \int_m \mathbf{a} dm = \int_m \dot{\mathbf{v}} dm = \left(\int_m \mathbf{v} dm \right)^{\bullet} = \dot{\mathbf{p}} \quad (11)$$

und besagt, dass die Summe aller Massenkkräfte und Oberflächenkräfte gleich der zeitlichen Änderung des Impulses

$$\mathbf{p} = \int_m \mathbf{v} dm \quad (12)$$

des Körpers ist. Diese Aussage nennt man den Impulssatz in Integralform. Er bringt das Grundgesetz der Kinetik im Sinne der Betrachtungsweise von Newton zum Ausdruck.

Wichtig: Der Impulssatz gilt unabhängig vom Material des Körpers, also für alle Festkörper und Fluide.

Das kinetische Momentengleichgewicht wird übrigens durch die Symmetrie des Spannungstensors $\mathbf{T}$ sichergestellt.

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten

Die Leistung einer Einzelkraft $\mathbf{f}$, deren Angriffspunkt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt, ist bekanntlich $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$. Wenn der Körper momentan ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}^*$ besitzen würde (der Stern deutet an, dass es sich um ein gedachtes=virtuelles Feld handelt), dann wäre die Leistung der gesamten äußeren Kräfte (Massenkkräfte, Trägheitskräfte und Oberflächenkräfte)

$$P_a^* = \int_m \mathbf{v}^* \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) dm + \int_A \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} dA. \quad (13)$$

Mit (10) und (6) wird daraus

$$P_a^* = - \int_V \mathbf{v}^* \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \nabla dV + \int_A \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (14)$$

Akzente sollen hier und im Folgenden andeuten, worauf die Ableitungsoperation ∇ anzuwenden ist. Mit dem Gaußschen Satz und der Produktregel gilt nun

$$\int_A \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \overline{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{T}} \cdot \nabla dV = \int_V \mathbf{v}^* \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \nabla dV + \int_V \dot{\mathbf{v}}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla dV. \quad (15)$$

Einsetzen von (15) in (14) liefert

$$P_a^* = P_i^* \quad (16)$$

mit der virtuellen Spannungsleistung, auch virtuelle Formänderungsleistung oder virtuelle Leistung der inneren Kräfte genannt, — man beachte die Symmetrie von $\mathbf{T}$ —

$$P_i^* = \int_V \dot{\mathbf{v}}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla dV = \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot \nabla \otimes \dot{\mathbf{v}}^* dV = \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot \text{sym grad } \dot{\mathbf{v}}^* dV . \quad (17)$$

Wir haben also die Aussage erhalten: Wenn die Cauchysche Gleichung (6) und die differentielle Impulsbilanz (10) erfüllt sind, d.h., wenn auf der Oberfläche des Körpers und in seinem Inneren überall kinetisches Gleichgewicht herrscht, dann besteht für jedes virtuelle Geschwindigkeitsfeld Gleichheit zwischen den virtuellen Leistungen (13) und (17) der äußeren bzw. inneren Kräfte.

Von größter praktischer Bedeutung ist nun die Erkenntnis, dass man diese Aussage auch umkehren kann:

Wenn für jedes virtuelle Geschwindigkeitsfeld die inneren und äußeren virtuellen Leistungen gleich sind, dann herrscht im Körper und auf seiner Oberfläche überall kinetisches Gleichgewicht.

Diese auf dem Leistungsbegriff basierende Formulierung des Gleichgewichts nennt man Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten oder d'Alembertsches Prinzip in der Lagrangeschen Fassung.

Oft denkt man sich die virtuelle Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{v}}^*$ mit einem Zeitinkrement δt multipliziert und erhält so eine virtuelle Verschiebung oder Verrückung $\delta \mathbf{u} = \dot{\mathbf{v}}^* \delta t$. Aus der virtuellen Leistung wird dann eine virtuelle Arbeit $\delta W = P^* \delta t$, und man spricht daher auch vom Prinzip der virtuellen Arbeit oder der virtuellen Verrückung.

Es bleibt noch der Beweis des Prinzips zu erbringen. Seine Forderung nach Gleichheit der virtuellen Arbeit der äußeren und der inneren Kräfte

$$\delta W_a = \delta W_i \quad (18)$$

schreibt sich ausführlich

$$\int_m \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) dm + \int_A \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dA = \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot \text{sym grad } \delta \mathbf{u} dV . \quad (19)$$

Die Durchführung von Umformungen wie in (15) und (17) macht aus der rechten Seite

$$\int_V \mathbf{T} \cdot \cdot \text{sym grad } \delta \mathbf{u} dV = \int_V \overline{\delta \mathbf{u}} \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla dV = \int_V \overline{\delta \mathbf{u}} \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla dV - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla dV = \int_A \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla dV . \quad (20)$$

Nach Einsetzen in (19) erhalten wir die Aussage, dass

$$\int_V \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla + \varrho \mathbf{b} - \varrho \mathbf{a}) dV + \int_A \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (21)$$

gelten muss für jedes beliebige Vektorfeld $\delta \mathbf{u}$. Wählt man nun das Feld $\delta \mathbf{u}$ nur in einer beliebig kleinen Umgebung eines inneren Punktes oder Randpunktes von Null verschieden, so ergibt sich nur dann für keine Richtung von $\delta \mathbf{u}$ ein Widerspruch, wenn der unterstrichene Faktor bei $\delta \mathbf{u}$ in der Umgebung dieses Punktes gleich Null ist. (Fundamentale Schlussweise der Variationsrechnung.)

Wir erhalten also — wie bewiesen werden sollte — die Feldgleichung

$$\mathbf{T} \cdot \nabla + \varrho \mathbf{b} = \varrho \mathbf{a} \quad (22)$$

und die Spannungsrandbedingung

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (23)$$

als Aussagen des kinetischen Gleichgewichts im Körper und auf seinem Rand. Die letzten beiden Gleichungen nennt man auch die starke Form der Gleichgewichtsbedingungen. Demgegenüber bezeichnet man die Arbeitsaussage (19) als schwache Form der Gleichgewichtsbedingung. Eine genauere mathematische Betrachtung zeigt, dass beide Formen nicht völlig äquivalent sind. Die Formulierung (22) setzt voraus, dass das Spannungsfeld differenziert werden kann, in (19) werden jedoch keine Ableitungen des Spannungsfeldes benötigt, so dass weniger glatte Spannungsfelder zugelassen werden können.

Exakte und numerische Lösung von Gleichgewichtsaufgaben

Exakt lassen sich nur solche Probleme lösen, bei denen Geometrie, Belastung und Materialverhalten besonders einfach sind. Dabei geht man aus von der starken Form (22), (23). Wollte man statt dessen mit der schwachen Form (19) arbeiten, so müsste man diese skalarwertige Aussage für unendlich viele verschiedene virtuelle Verschiebungsfelder $\delta \mathbf{u}$ aufschreiben, was in der Regel nicht praktikabel ist. Ganz anders stellt die Situation sich dar, wenn das Problem so komplex ist, dass man sowieso mit einer Näherungslösung zufrieden sein muss. Das bei Festigkeitsuntersuchungen eingesetzte Näherungsverfahren von Ritz, heute systematisiert zur Methode der Finiten Elemente, stützt sich auf die schwache Formulierung (19). (Das Verfahren von Galerkin verwendet statt dessen die daraus durch Umformung entstandene Fassung (21).) Die Erfüllung dieser Gleichung wird jedoch nicht für beliebige Felder $\delta \mathbf{u}$, sondern nur für eine endliche Anzahl möglichst repräsentativ gewählter und linear unabhängiger virtueller Verschiebungen $\mathbf{v}_i$ ($i = 1 \dots n$) gefordert. Aus (19) entstehen dann n skalare Gleichungen

$$\int_m \mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) dm + \int_A \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{t} dA = \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot \text{sym grad } \mathbf{v}_i dV \quad i = 1 \dots n. \quad (24)$$

Die Feldgleichung (22) und die Randbedingung (23) des Gleichgewichts werden auf diese Weise natürlich nicht mehr an jedem Punkt im Inneren bzw. auf dem Rand des Körpers befriedigt, sondern nur noch in einem gewissen Mittel.

Wichtig: Dieses Vorgehen lässt sich anwenden auf bewegte Körper aus beliebigem Material und bei beliebig großen Verformungen.

Vielfach sind auf einem Teil A_1 der Oberfläche des Körpers die Verschiebungen $\mathbf{u}$, auf einem anderen Teil A_2 die Spannungen $\mathbf{t}$ vorgeschrieben. Zerlegt man das zweite Integral auf der linken Seite von (24) gemäß

$$\int_{A_1} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{t} dA + \int_{A_2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{t} dA, \quad (25)$$

so lässt sich das Integral über A_2 problemlos auswerten, während die Randspannung $\mathbf{t}$ im Integral über A_1 als Reaktionsgröße in der Lagerung nicht bekannt ist. Man löst das Problem, indem man nur solche virtuellen Verschiebungsfelder $\mathbf{v}_i$ verwendet, die auf A_1 verschwinden, also dort die homogene Verschiebungsrandbedingung erfüllen.

Elastostatik kleiner Verformungen

Bei kleinen Verformungen gilt zwischen Verschiebungen $\mathbf{u}$ und Verzerrungen $\mathbf{E}$ der Zusammenhang

$$\mathbf{E} = \text{sym grad } \mathbf{u} \quad (26)$$

und damit zwischen der virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ und dem virtuellen Verzerrungszuwachs $\delta \mathbf{E}$

$$\delta \mathbf{E} = \text{sym grad } \delta \mathbf{u} . \quad (27)$$

Beschränken wir uns außerdem auf den Fall der Statik ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$), so wird aus (19)

$$\int_m \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, dm + \int_A \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dA = \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot \delta \mathbf{E} \, dV . \quad (28)$$

Wenn das Materialverhalten durch das elastische Gesetz

$$\mathbf{T} = \mathcal{C} \cdot \cdot \mathbf{E} \quad (29)$$

mit der Symmetrie $\mathcal{C} = \mathcal{C}^T$ (Hyperelastizität) beschrieben wird, dann ist

$$\mathbf{T} \cdot \cdot \delta \mathbf{E} = \delta w(\mathbf{E}) , \quad (30)$$

also die virtuelle Spannungsleistung je Volumeneinheit gleich der virtuellen Änderung der Formänderungsenergie je Volumeneinheit

$$w(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \cdot \mathcal{C} \cdot \cdot \mathbf{E} . \quad (31)$$

Aus (28) wird dann — wenn wir wieder $\delta \mathbf{u} = 0$ auf A_1 fordern —

$$\int_m \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, dm + \int_{A_2} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dA = \int_V \delta w(\mathbf{E}) \, dV . \quad (32)$$

Als Formänderungsenergie des Körpers definieren wir

$$E_{\text{def}} = \int_V w(\mathbf{E}) \, dV . \quad (33)$$

Wenn die Massenkräfte je Masseneinheit $\mathbf{b}$ und die Randspannungen $\mathbf{t}$ auf A_2 als konstant gegeben sind, also von der sich einstellenden Verschiebung $\mathbf{u}$ des Körpers nicht abhängen (sogenannte Totlast), dann können wir ferner die potentielle Energie dieser Kräfte definieren als

$$E_{\text{pot}} = - \int_m \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, dm - \int_{A_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dA . \quad (34)$$

Damit wird (32) zu

$$\delta E_{\text{pot}} + \delta E_{\text{def}} = 0 . \quad (35)$$

Die Gleichgewichtsaussage der Elastostatik kleiner Verformungen erweist sich also als äquivalent zu der Aussage, dass die gesamte mechanische Energie des Systems (auch als elastisches Potential bezeichnet)

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{def}} \quad (36)$$

einen stationären Wert annimmt, also sich in erster Näherung bei keiner virtuellen Verrückung aus der Gleichgewichtsform mit der Eigenschaft $\delta \mathbf{u} = 0$ auf A_1 ändert. Ist der stationäre Wert der mechanischen Energie insbesondere ein Minimum, dann spricht man von einer stabilen Gleichgewichtslage, weil zum Übergang in eine andere Lage ein positiver Arbeitsaufwand nötig ist.

Elastostatik großer Drehungen

Wenn zwar die Drehungen groß, aber die Verzerrungen klein sind, dann kann man den quadratischen Ansatz (31) für die Formänderungsenergie beibehalten, muss aber als Verzerrungstensor $\mathbf{E}$ an Stelle des symmetrischen Teils des Verschiebungsgradienten (26) den in den Verschiebungsableitungen nichtlinearen Greenschen Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}^{(G)} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (37)$$

mit der lokalen Umplatzierung (auch Deformationsgradient genannt)

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{u} \otimes \hat{\nabla} \quad (38)$$

benutzen (geometrisch nichtlineare, aber physikalisch lineare Theorie). Man beachte, dass bei den hier betrachteten großen Verformungen die aktuelle Platzierung von der Bezugsplatzierung (spannungsfreie Ausgangsplatzierung) unterschieden werden muss, und dass ∇ die Ableitung nach dem Ortsvektor der aktuellen Platzierung bedeutet, während die in (38) auftretende Ableitung nach dem Ortsvektor der Bezugsplatzierung zum Unterschied davon als $\hat{\nabla}$ geschrieben wird. Die Forderung (32) des Prinzips der virtuellen Verrückungen für den elastischen Körper (virtuelle äußere Arbeit = virtuelle Änderung der Formänderungsenergie für jede virtuelle Verrückung) notieren wir nun auch in der Bezugsplatzierung:

$$\int_m \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, dm + \int_{\hat{A}_2} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\hat{A} = \int_{\hat{V}} \delta w(\mathbf{E}^{(G)}) \, d\hat{V} . \quad (39)$$

Es muss sein $\hat{\mathbf{t}} \, d\hat{A} = \mathbf{t} \, dA$, d.h., es bedeutet $\hat{\mathbf{t}}$ die auf die Ausgangsfläche bezogene Oberflächenkraft (sogenannte Nennspannung). Ferner erkennt man, dass w jetzt als Formänderungsenergie je Volumeneinheit der Bezugsplatzierung zu deuten ist.

Führen wir als Abkürzung den symmetrischen Tensor der Kirchhoffschen oder 2. Piola-Kirchhoff-Spannung

$$\mathbf{T}^{(K)} = \mathcal{C} \cdot \cdot \mathbf{E}^{(G)} \quad (40)$$

ein, so finden wir

$$\delta w(\mathbf{E}^{(G)}) = \delta \frac{1}{2} \mathbf{E}^{(G)} \cdot \cdot \mathcal{C} \cdot \cdot \mathbf{E}^{(G)} = \delta \mathbf{E}^{(G)} \cdot \cdot \mathcal{C} \cdot \cdot \mathbf{E}^{(G)} = \delta \mathbf{E}^{(G)} \cdot \cdot \mathbf{T}^{(K)} = \mathbf{T}^{(K)} \cdot \cdot \delta \mathbf{E}^{(G)} . \quad (41)$$

Gleichgewicht bei großen Verformungen unter Verwendung der Bezugsplatzierung

Nach der letzten Gleichung stellt die virtuelle Spannungsleistung sich dar als Doppelpunktprodukt der Kirchhoffschen Spannung mit dem virtuellen Zuwachs der Greenschen Verzerrung. Diese Eigenschaft lässt sich nun auch bei beliebigem Materialverhalten zur Definition der Kirchhoffschen Spannung benutzen. Die zuletzt vorgenommene Beschränkung auf kleine und elastische Verzerrungen kann man somit fallenlassen und erhält für beliebig große Verformungen von Körpern aus beliebigem Material alternativ zu (19) die folgende Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen:

$$\int_m \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \, dm + \int_{\hat{A}} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\hat{A} = \int_{\hat{V}} \mathbf{T}^{(K)} \cdot \cdot \delta \mathbf{E}^{(G)} \, d\hat{V} . \quad (42)$$

Auch sie kann als Grundlage von Näherungsverfahren dienen (FEM u.a.).

Um statt dessen die hinsichtlich der Bezugsplatzierung formulierte Differentialgleichung und die Spannungsrandbedingung des Gleichgewichts herzuleiten, beschaffen wir uns zunächst aus (38)

$$\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{u} \otimes \hat{\nabla} \quad (43)$$

und damit aus (37)

$$\delta \mathbf{E}^{(G)} = \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F} \right) = \text{sym} \left(\delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \right) = \text{sym} \left(\hat{\nabla} \otimes \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \right). \quad (44)$$

Damit lässt die rechte Seite von (42) sich umformen gemäß

$$\begin{aligned} \int_{\hat{V}} \mathbf{T}^{(K)} \cdot \delta \mathbf{E}^{(G)} d\hat{V} &= \int_{\hat{V}} \mathbf{T}^{(K)} \cdot \text{sym} \left(\hat{\nabla} \otimes \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \right) d\hat{V} = \int_{\hat{V}} \mathbf{T}^{(K)} \cdot \left(\hat{\nabla} \otimes \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \right) d\hat{V} \\ &= \int_{\hat{V}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(K)} \cdot \hat{\nabla} d\hat{V} = \int_{\hat{V}} \overline{\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(K)}} \cdot \hat{\nabla} d\hat{V} - \int_{\hat{V}} \delta \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(K)}} \cdot \hat{\nabla} d\hat{V} \\ &= \int_{\hat{A}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(K)} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{A} - \int_{\hat{V}} \delta \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(K)}} \cdot \hat{\nabla} d\hat{V} \end{aligned} \quad (45)$$

Unter Beachtung von $dm = \hat{\rho} d\hat{V}$ wird dann aus (42)

$$\int_{\hat{V}} \delta \mathbf{u} \cdot \left(\overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(K)}} \cdot \hat{\nabla} + \hat{\rho} \mathbf{b} - \hat{\rho} \mathbf{a} \right) d\hat{V} + \int_{\hat{A}} \delta \mathbf{u} \cdot \left(\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(K)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) d\hat{A} = 0 \quad (46)$$

Führt man zur Abkürzung den *unsymmetrischen Tensor* $\hat{\mathbf{T}}$ der 1. Piola-Kirchhoff-Spannung ein durch

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(K)}, \quad (47)$$

so erschließt man wegen der Beliebigkeit der virtuellen Verschiebungsfelder $\delta \mathbf{u}$ die Feldgleichung

$$\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\nabla} + \hat{\rho} \mathbf{b} = \hat{\rho} \mathbf{a} \quad (48)$$

und die Spannungsrandbedingung

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (49)$$

Zieht man noch den Zusammenhang

$$\mathbf{n} dA = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{A} \quad (50)$$

zwischen den orientierten Flächenelementen in der aktuellen und der Bezugsplatzierung heran, dann sieht man

$$\begin{aligned} \mathbf{t} dA &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{A} \\ &= \hat{\mathbf{t}} d\hat{A} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{A} \end{aligned} \quad (51)$$

Ein Vergleich gibt unter Beachtung von (47)

$$\hat{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \implies \mathbf{T}^{(K)} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad (52)$$

also den Zusammenhang zwischen den Spannungen $\mathbf{T}^{(K)}$ und $\mathbf{T}$. Während die vom Material empfundene Kirchhoff-Spannung $\mathbf{T}^{(K)}$ bei einer reinen Drehung des Körpers unverändert bleibt, ändert sich die vom raumfesten Beobachter registrierten Cauchy-Spannung $\mathbf{T}$ bei einer solchen Drehung.