Begleitblatt **T** zur Vorlesung **Höhere Festigkeitslehre**
TFH Berlin, FB VIII, Prof. Dr.-Ing. A. Krawietz

Zwängungsfreie Torsion

Voraussetzungen:

- Prismatischer Stab
- Isotrop-elastisches Material
- Kleine Verformungen

Die folgende exakte Behandlung des Problems im Sinne der dreidimensionalen Theorie stammt von de St.-Vénant (1855).

Ortsvektor der Stabpunkte in der unverformten Ausgangslage: $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = x\mathbf{e}_x + \mathbf{r}_p$.
Es sind $x\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{r}_p$ der Anteil in Richtung der Stabachse (=x-Achse) bzw. der planare (d.h. in der Querschnittsebene liegende) Anteil. Die räumliche Ableitung wird zerlegt gemäß

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \nabla_p \; . \tag{1}$$

Verschiebungsansatz: Drehung der Querschnitte um eine Achse parallel zur Stabachse durch einen Punkt M (mit dem planaren Ortsvektor $\mathbf{r}_M$). Der Drehwinkel wächst linear mit x, weil die Drillung θ von x unabhängig angenommen wird. Zusätzlich wird eine Querschnittsverwölbung zugelassen.

$$\mathbf{u} = \theta \Big(x\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M\big) + \phi(\mathbf{r}_p)\mathbf{e}_x \Big) \; . \tag{2}$$

Abgeleitet:

$$\mathbf{u} \otimes \nabla = \theta \Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M\big) \otimes \mathbf{e}_x + x\, \underline{\mathbf{e}_x \times \mathbf{r} \otimes \nabla} + \mathbf{e}_x \otimes \nabla_p \phi \Big) \; . \tag{3}$$

(Der unterstrichene Tensor $\mathbf{e}_x \times \mathbf{r} \otimes \nabla = \mathbf{e}_x \times \mathbf{1}$ ist antimetrisch, denn für alle Vektoren $\mathbf{a}$ gilt $\mathbf{a} \cdot \big(\mathbf{e}_x \times \mathbf{1}\big) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = 0$).

Das Feld des *Verzerrungstensors* ergibt sich zu

$$\mathbf{E} = \operatorname{sym}\big(\mathbf{u} \otimes \nabla\big) = \operatorname{sym}\big(\mathbf{e}_x \otimes \boldsymbol{\gamma}\big) \tag{4}$$

mit dem (planaren) *Schubwinkelvektor*

$$\boldsymbol{\gamma} = \theta\Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M\big) + \nabla_p \phi\Big) = \theta\Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\big) + \nabla_p \phi\Big) \, , \tag{5}$$

der — wie man sieht — von der Koordinate x nicht abhängt.

Daraus folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{tr} \mathbf{E} = 0 \; . \tag{6}$$

Die *Spannungen* erhalten wir aus dem Hookeschen Gesetz zu

$$\mathbf{T} = 2G \left(\mathbf{E} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \operatorname{tr}\mathbf{E}\, \mathbf{1} \right) = \mathbf{e}_x \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{e}_x \tag{7}$$

mit dem (planaren) *Schubspannungsvektor* $\boldsymbol{\tau} = G\boldsymbol{\gamma}$.

Die *Gleichgewichtsbedingung* liefert

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{e}_x \big(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla_p \big) \, , \tag{8}$$

also

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla_p = 0 \, . \tag{9}$$

Spannungsfreiheit an der *Oberfläche* verlangt

$$0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{e}_x \big(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \big) \, , \tag{10}$$

also

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \, . \tag{11}$$

In der Querschnittsfläche wirken die Spannungen $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_x = \boldsymbol{\tau}$. Ihre *resultierende Kraft* berechnet sich zu

$$\mathbf{f} = \int_A \boldsymbol{\tau} \, dA = \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{1}_p \, dA = \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \big(\nabla_p \otimes \mathbf{r}_p \big) \, dA = \oint \underline{\big(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \big)} \, \mathbf{r}_p \, ds - \int_A \underline{\big(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla_p \big)} \, \mathbf{r}_p \, dA = 0 \tag{12}$$

— die unterstrichenen Terme verschwinden wegen (11) und (9) — und ihr *resultierendes Moment* bezüglich eines Bezugspunktes A mit dem (planaren) Ortsvektor $\mathbf{r}_A$ zu

$$\mathbf{m}_{„A“} = \int_A \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A \big) \times \boldsymbol{\tau} \, dA = \int_A \Big(\big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A \big) \times \boldsymbol{\tau} \Big) \cdot \mathbf{e}_x \, dA \, \mathbf{e}_x = M_t \, \mathbf{e}_x \, . \tag{13}$$

Von den sechs möglichen (skalaren) Schnittgrößen ist also nur das *Torsionsmoment* M_t von Null verschieden (und unabhängig von der Koordinate x). Es gilt aber

$$\int_A \big(\mathbf{r}_A \times \boldsymbol{\tau} \big) \cdot \mathbf{e}_x \, dA = \left(\mathbf{r}_A \times \underline{\int_A \boldsymbol{\tau} \, dA} \right) \cdot \mathbf{e}_x = 0 \tag{14}$$

für jede Wahl von $\mathbf{r}_A$ — denn der unterstrichene Term verschwindet nach (12) —, so daß bei reiner Torsion der Bezugspunkt A bei der Berechnung des Torsionsmoments beliebig gewählt werden kann.

Im folgenden benötigen wir die Identität

$$\big(\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}_p \big) \cdot \nabla_p = \mathbf{e}_x \cdot \big(\mathbf{r}_p \times \nabla_p \big) = 0 \, . \tag{15}$$

Einsetzen von $\boldsymbol{\tau} = G \boldsymbol{\gamma}$ mit (5) in (9) liefert mit (15) die Differentialgleichung

$$0 = \frac{1}{G\theta} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla_p = \Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M \big) + \nabla_p \phi \Big) \cdot \nabla_p = \nabla_p \cdot \nabla_p \phi = \Delta_p \phi \, , \tag{16}$$

und Einsetzen in (11) gibt unter Verwendung des Tangentenvektors

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}_x \times \mathbf{n} \tag{17}$$

die Randbedingung

$$0 = \frac{1}{G\theta} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M \big) + \nabla_p \phi \Big) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{t} \cdot \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M \big) + \frac{\partial \phi}{\partial n} \, . \tag{18}$$

Das Torsionsmoment erhalten wir aus (13) — wir wählen $A = M$ — zu

$$M_t = \int_A \Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M \big) \Big) \cdot \boldsymbol{\tau} \, dA = G\theta \int_A \Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M \big) \Big) \cdot \Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M \big) + \nabla_p \phi \Big) \, dA = G\theta I_t \tag{19}$$

mit dem *Torsionsflächenmoment*

$$I_t = \int_A \left|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\right|^2 dA + \int_A \Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\big)\Big) \cdot \nabla_p \phi \, dA \; . \tag{20}$$

Das letzte Integral läßt sich mit (17), (18) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
\int_A \Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\big)\Big) \cdot \nabla_p \phi \, dA &= \oint \Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\big)\Big) \cdot \mathbf{n} \, \phi \, ds - \int_A \underline{\mathbf{e}_x \cdot \big(\mathbf{r}_p \times \nabla_p\big)} \, \phi \, dA \\
&= -\oint \mathbf{t} \cdot \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\big) \, \phi \, ds = -\oint \frac{\partial \phi}{\partial n} \, \phi \, ds = -\oint \mathbf{n} \cdot (\nabla_p \phi) \, \phi \, ds \\
&= -\int_A (\nabla_p \phi) \cdot (\nabla_p \phi) \, dA - \int_A \underline{\nabla_p \cdot (\nabla_p \phi)} \, \phi \, dA \\
&= -\int_A \left|\nabla_p \phi\right|^2 dA \; . \qquad (21)
\end{aligned}$$

Die unterstrichenen Terme sind wegen (15) bzw. (16) entfallen. Aus (20) und (21) schließt man

$$I_t = \int_A \left|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\right|^2 dA - \int_A \left|\nabla_p \phi\right|^2 dA \le \int_A \left|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\right|^2 dA = I_{p\,„M“} \; . \tag{22}$$

Das Torsionsflächenmoment kann also nicht größer sein als das polare Flächenmoment 2. Grades bezüglich der Drehachse.

Gemäß (16) und (18) muß die normierte Axialverschiebung $\phi\big(\mathbf{r}_p\big)$ der ebenen Laplace- oder Potentialgleichung

$$\Delta_p \phi = 0 \tag{23}$$

und der Randbedingung

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{t} \cdot \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\big) \tag{24}$$

genügen. (Bei Hohlquerschnitten ist die letzte Bedingung auf jedem Teilrand zu fordern.) Die normierte Axialverschiebung erweist sich also als Lösung eines sog. *Neumannschen Problems*. Durch die Differentialgleichung nebst Randbedingung ist sie nur bis auf eine additive Konstante festgelegt.

Es bleibt zu klären, welchen Einfluß die *Wahl der Drehachse* besitzt. Eine normierte Axialverschiebung zur Wahl $\mathbf{r}_M = \mathbf{0}$ soll mit ϕ_0 bezeichnet werden. Sie genügt der Differentialgleichung

$$\nabla_p \cdot \nabla_p \phi_0 = 0 \tag{25}$$

und der Randbedingung

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_p \phi_0 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{r}_p \; . \tag{26}$$

Eine zu einer anderen Drehachse gehörige normierte Axialverschiebung ist dann gegeben durch

$$\phi\big(\mathbf{r}_p\big) = \phi_0\big(\mathbf{r}_p\big) + \big(\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}_M\big) \cdot \mathbf{r}_p \tag{27}$$

mit

$$\nabla_p \phi = \nabla_p \phi_0 + \mathbf{e}_x \times \mathbf{r}_M \; , \tag{28}$$

denn daraus folgt

$$\nabla_p \cdot \nabla_p \phi = \nabla_p \cdot \nabla_p \phi_0 = 0 \tag{29}$$

und

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_p \phi = \mathbf{n} \cdot \nabla_p \phi_0 + \big(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_x\big) \cdot \mathbf{r}_M \,, \tag{30}$$

also mit (17) gerade die Bedingungen (23) und (24). Während also die Axialverschiebung von der Wahl der Drehachse abhängt, ist die Schubspannungverteilung davon unabhängig, denn aus (5) mit (28) folgt

$$\frac{1}{G\theta}\boldsymbol{\tau} \; = \frac{1}{\theta}\boldsymbol{\gamma} \; = \mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\big) + \nabla_p \phi = \mathbf{e}_x \times \mathbf{r}_p + \nabla_p \phi_0 \,, \tag{31}$$

und der letzte Ausdruck enthält $\mathbf{r}_M$ nicht mehr. Damit ist natürlich auch das Torsionsmoment M_t und folglich nach (19) auch das Torsionsflächenmoment $I_t = M_t/(G\theta)$ von der Wahl der Drehachse unabhängig.

Es sind zwei Arten von Querschnitten zu unterscheiden:

a) *Wölbfreie Querschnitte*: Es ist ϕ_0 eine lineare Funktion von $\mathbf{r}_p$, also $\phi_0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_p + K$, und damit ist nach (27) auch ϕ für jede Wahl von $\mathbf{r}_M$ linear. Die Querschnittsfläche bleibt also eben. Für die Wahl $\mathbf{r}_M = \mathbf{e}_x \times \mathbf{a}$ der Drehachse wird insbesondere $\phi = K = const.$, und daher stimmt nach (22) das Torsionsflächenmoment mit dem polaren Flächenmoment bezüglich dieser Drehachse überein.

b) *Querschnitte mit Verwölbung*: Wenn ϕ_0 keine lineare Funktion von $\mathbf{r}_p$ ist, dann ist es nach (27) auch kein ϕ für irgendeine Wahl von $\mathbf{r}_M$. Das Torsionsflächenmoment ist also kleiner als das polare Flächenmoment bezüglich jeder beliebigen Achse.

Begleitblatt **P** zur Vorlesung **Höhere Festigkeitslehre**
TFH Berlin, FB VIII, Prof. Dr.-Ing. A. Krawietz

Der prismatische Stab
Herleitung der Differentialgleichungen und Randbedingungen für Längsdehnung, Biegung, Querkraft-Schubverformung und Torsion aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie

Voraussetzungen:

- Isotrop-elastisches Material
- Kleine Verformungen

Die Reduktion des dreidimensionalen Problems auf ein eindimensionales geschieht, indem Annahmen über die Querschnittsverformungen getroffen werden.

Ortsvektor der Stabpunkte in der unverformten Ausgangslage: $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = x\mathbf{e}_x + \mathbf{r}_p$.

Verschiebungsannahmen:
a) Jeder Stabquerschnitt verschiebt sich und dreht sich um eine Achse senkrecht zur Stabachse wie ein starrer Körper.
b) Zusätzlich dreht der Querschnitt sich um eine Achse parallel zur Stabachse durch einen Punkt M und erfährt dabei Axialverschiebungen, deren Form aus der Theorie der zwängungsfreien Torsion übernommen wird.

$$\mathbf{u}\big(x, \mathbf{r}_p\big) = \bar{\mathbf{u}}(x) + \boldsymbol{\psi}_p(x) \times \mathbf{r}_p + \psi_x(x)\,\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M\big) + \psi_x'(x)\,\phi\big(\mathbf{r}_p\big)\,\mathbf{e}_x\ . \tag{1}$$

Die Balkenverformung wird auf diese Weise festgelegt durch zwei vektorielle (also sechs skalare) Funktionen der einen unabhängigen Variablen x, nämlich
1) eine später noch genauer zu deutende Verschiebung

$$\bar{\mathbf{u}}(x) = u(x)\,\mathbf{e}_x + \mathbf{u}_p(x) = u(x)\,\mathbf{e}_x + v(x)\,\mathbf{e}_y + w(x)\,\mathbf{e}_z \tag{2}$$

2) und die Querschnittsdrehung

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \psi_x(x)\,\mathbf{e}_x + \boldsymbol{\psi}_p(x) = \psi_x(x)\,\mathbf{e}_x + \psi_y(x)\,\mathbf{e}_y + \psi_z(x)\,\mathbf{e}_z\ . \tag{3}$$

Die Abhängigkeit der Verschiebungen von den beiden anderen unabhängigen Variablen y und z ist durch unsere Verschiebungsannahmen festgelegt.

Bemerkung: Diese Idee, Annahmen zu treffen derart, daß an Stelle von Funktionen dreier Variabler nur noch Funktionen von einer oder zwei Variablen zu ermitteln sind, nennt man Verfahren von Kantorowitsch. Wenn die Annahmen so weit gehen, daß keine Funktionen, sondern nur endlich viele Parameter zu ermitteln sind, dann spricht man vom Ritzschen Verfahren. Letzteres ist Grundlage der Methode der Finiten Elemente.

Ableitung der Verschiebungen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \otimes \nabla &= \mathbf{u} \otimes \Big(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \nabla_p\Big) \\
&= \Big(\bar{\mathbf{u}}'(x) + \boldsymbol{\psi}_p'(x) \times \mathbf{r}_p + \psi_x'(x)\,\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M\big) + \psi_x''(x)\,\phi\big(\mathbf{r}_p\big)\,\mathbf{e}_x\Big) \otimes \mathbf{e}_x \\
&\quad + \underbrace{\boldsymbol{\psi}_p(x) \times \mathbf{r}_p \otimes \nabla_p} + \psi_x(x)\,\underline{\mathbf{e}_x \times \mathbf{r} \otimes \nabla} + \psi_x'(x)\,\mathbf{e}_x \otimes \nabla_p \phi\ .
\end{aligned} \tag{4}$$

Der unterstrichene Tensor ist antimetrisch, während der unterklammerte sich umschreiben läßt gemäß

$$\boldsymbol{\psi}_p(x) \times \mathbf{r}_p \otimes \nabla_p = \boldsymbol{\psi}_p \times \mathbf{1}_p = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\psi}_p \times \mathbf{1}_p = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p \cdot \mathbf{1}_p = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p \,. \tag{5}$$

Das Feld des *Verzerrungstensors* ergibt sich zu

$$\mathbf{E} = \mathrm{sym}\big(\mathbf{u} \otimes \nabla\big) = \varepsilon\, \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathrm{sym}\big(\mathbf{e}_x \otimes \boldsymbol{\gamma}\big) \tag{6}$$

mit der *Längsdehnung*

$$\varepsilon = u'(x) + \big(\mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p'(x)\big) \cdot \mathbf{r}_p + \psi_x''(x)\, \phi\big(\mathbf{r}_p\big) \tag{7}$$

und dem (planaren) *Schubwinkelvektor*

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{u}_p'(x) + \mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p(x) + \psi_x'(x) \Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\big) + \nabla_p \phi\Big) \,. \tag{8}$$

Nach dem Hookeschen Gesetz gehört zu dem Schubwinkelvektor ein Schubspannungsvektor

$$\boldsymbol{\tau} = G\, \boldsymbol{\gamma} \tag{9}$$

und eine spezifische Formänderungsenergie

$$\tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \tfrac{G}{2}\, \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} \,. \tag{10}$$

Die Dehnung ε denken wir uns durch eine einachsige Spannung

$$\sigma = E\, \varepsilon \tag{11}$$

hervorgerufen, und die zugehörige spezifische Formänderungsenergie ist dann

$$\tfrac{1}{2}\, \sigma \varepsilon = \tfrac{E}{2}\, \varepsilon^2 \,. \tag{12}$$

Bemerkung: Zu dieser einachsigen Spannung σ gehören eigentlich — sofern die Querkontraktionszahl $\nu \neq 0$ ist —auch Querdehnungen in der Querschnittsebene, die in unseren Verschiebungsannahmen nicht enthalten sind. Um korrekt zu sein, müßte man die Verschiebungsannahmen abändern, doch hätte das keine Konsequenzen für das Folgende.

Die *Formänderungsenergie des gesamten Balkens* berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{def}} \;&=\; \int_{x=0}^{l} \int_A \left(\frac{E}{2}\, \varepsilon^2 + \frac{G}{2}\, \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}\right) dA\, dx \\
&=\; \int_{x=0}^{l} \int_A \Bigg(\frac{E}{2} \Big[u'(x)^2 \;+\; \big(\mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p'(x)\big) \cdot \mathbf{r}_p \otimes \mathbf{r}_p \cdot \big(\mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p'(x)\big) \;+\; \psi_x''(x)^2\, \phi\big(\mathbf{r}_p\big)^2 \\
&\qquad +2u'(x)\big(\mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p'(x)\big) \cdot \mathbf{r}_p \;+\; 2u'(x)\psi_x''(x)\, \phi\big(\mathbf{r}_p\big) \;+\; 2\psi_x''(x)\, \big(\mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p'(x)\big) \cdot \mathbf{r}_p\; \phi\big(\mathbf{r}_p\big)\Big] \\
&\qquad +\frac{G}{2} \Big[\Big|\mathbf{u}_p'(x) + \mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p(x)\Big|^2 \;+\; \psi_x'(x)^2\, \Big|\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\big) + \nabla_p \phi\Big|^2 \\
&\qquad\quad +2\psi_x'(x)\, \big(\mathbf{u}_p'(x) + \mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p(x)\big) \cdot \Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\big) + \nabla_p \phi\Big)\Big]\Bigg)\, dA\, dx
\end{aligned} \tag{13}$$

Die Integration über die Querschnittsfläche kann für alle neun Summanden ausgeführt werden und liefert die folgenden acht voneinander verschiedenen *Querschnittskennwerte*:

$$
\begin{aligned}
&1) \qquad \int_A dA = A\,,\\
&2) \qquad \int_A \mathbf{r}_p \otimes \mathbf{r}_p \, dA = \mathbf{I}\,,\\
&3) \qquad \int_A \phi\big(\mathbf{r}_p\big)^2 \, dA = C_M\,,\\
&4) \qquad \int_A \mathbf{r}_p \, dA = \mathbf{r}_S A\,,\\
&5) \qquad \int_A \phi\big(\mathbf{r}_p\big) \, dA = \hat{\phi}\, A\,,\\
&6) \qquad \int_A \mathbf{r}_p\, \phi\big(\mathbf{r}_p\big) \, dA = \mathbf{c}_1\,,\\
&7) \qquad \int_A \Big|\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\big) + \nabla_p \phi\Big|^2 \, dA = I_t\,,\\
&8) \qquad \int_A \Big(\mathbf{e}_x \times \big(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_M\big) + \nabla_p \phi\Big) \, dA = \mathbf{c}_2\,.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Weitgehende Vereinfachungen ergeben sich, indem es gelingt, einige dieser Kennwerte zu Null zu machen. Der vierte Wert verschwindet, wenn die Stabachse durch den Flächenschwerpunkt S der Querschnittsfläche gelegt wird, denn dann gilt $\mathbf{r}_S = 0$. Den fünften Wert können wir zu Null machen durch geeignete Wahl der Funktion ϕ, die ja in der Theorie der zwängungsfreien Torsion nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Der sechste Kennwert läßt sich durch geeignete Festlegung der Drehachse zum Verschwinden bringen. (Diese läßt sich in der Tat beliebig wählen, denn eine Änderung von $\mathbf{r}_M$ und dem zugehörigen ϕ läßt sich durch gleichzeitige passende Änderung von $\bar{\mathbf{u}}$ und $\boldsymbol{\psi}_p$ kompensieren, so daß das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}$ in (1) ungeändert bleibt.) Beachtet man Formel (T.27), so hat man zu fordern

$$
0 = \mathbf{c}_1 = \int_A \mathbf{r}_p \Big(\phi_0\big(\mathbf{r}_p\big) + \big(\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}_M\big) \cdot \mathbf{r}_p\Big) \, dA\,,
\tag{15}
$$

und daraus folgt

$$
\int_A \mathbf{r}_p\, \phi_0\big(\mathbf{r}_p\big) \, dA + \mathbf{I} \cdot \big(\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}_M\big) = \mathbf{0}
\tag{16}
$$

und weiter für die Lage dieses ausgezeichneten — als *Schubmittelpunkt* bezeichneten — Punktes M

$$
\mathbf{r}_M = \mathbf{e}_x \times \mathbf{I}^{-1} \cdot \int_A \mathbf{r}_p\, \phi_0\big(\mathbf{r}_p\big) \, dA\,.
\tag{17}
$$

Aus (T.5) mit (T.12) folgert man, daß der achte Kennwert $\mathbf{c}_2$ aufgrund der Eigenschaften der Funktion ϕ stets verschwindet. Ferner erschließt man aus (T.21) und (T.22), daß der siebente Kennwert gerade das Torsionsflächenmoment I_t ist.

Es verbleibt für die Formänderungsenergie

$$
\begin{aligned}
E_{\text{def}} \quad = \quad & \int_{x=0}^{l} \Bigg(\frac{E}{2}\Big[A\, u'(x)^2 + \big(\mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p'(x)\big) \cdot \mathbf{I} \cdot \big(\mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p'(x)\big) + C_M\, \psi_x''(x)^2\Big]\\
&+ \frac{G}{2}\Big[A\, \big|\mathbf{u}_p'(x) + \mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p(x)\big|^2 + I_t\, \psi_x'(x)^2\Big]\Bigg) \, dx\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Die einzelnen Grundverformungsarten des Balkens erscheinen entkoppelt. Es bedeutet EA die Dehnsteifigkeit, $E\mathbf{I}$ den planaren Tensor der Biegesteifigkeit, EC_M die Wölbsteifigkeit, GA die Schubsteifigkeit und GI_t die Torsionssteifigkeit. Der Kennwert C_M, der Wölbwiderstand heißt, kommt zum Tragen, wenn die Drillung $\psi'_x(x)$ nicht längs des ganzen Stabes konstant ist, wie es die Theorie der zwängungsfreien Torsion vorausgesetzt hat. Man spricht dann von *Wölbkrafttorsion*, die nach (7) — ebenso wie die Längsdehnung und die Biegung — Dehnungen und damit Normalspannungen hervorruft. Bei wölbfreien Querschnitten (z.B. Kreisring) ist ϕ linear, und daher muß $\phi = 0$ gelten, wenn der fünfte und sechste Kennwert zu Null gefordert werden. Damit wird aber der dritte Kennwert C_M ebenfalls zu Null, d.h. solche Querschnitte haben keinen Wölbwiderstand.

Unter Benutzung von Koordinaten y, z in der Querschnittsebene schreibt der Tensor der Flächenmomente 2. Grades sich

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \int_A \mathbf{r}_p \otimes \mathbf{r}_p \, dA = \int_A \big(y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z\big) \otimes \big(y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z\big)\, dA \\
&= \int_A y^2\, dA\, \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \int_A z^2\, dA\, \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \int_A yz\, dA\, \big(\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y\big) \\
&= I_z\,\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + I_y\,\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + I_{yz}\big(\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y\big)\ .
\end{aligned} \tag{19}$$

Zweckmäßigerweise legt man die Achsen y, z in Richtung der Eigenvektoren des symmetrischen Tensors $\mathbf{I}$ (sog. Hauptachsen des Querschnitts), so daß $I_{yz} = 0$ wird. Der Biegeterm schreibt sich dann

$$\begin{aligned}
\big(\mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}'_p(x)\big) \cdot \mathbf{I} \cdot \big(\mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}'_p(x)\big) &= \big(\psi'_y(x)\mathbf{e}_z - \psi'_z(x)\mathbf{e}_y\big) \cdot \big(I_z\,\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + I_y\,\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z\big) \cdot \big(\psi'_y(x)\mathbf{e}_z - \psi'_z(x)\mathbf{e}_y\big) \\
&= I_y \psi'_y(x)^2 + I_z \psi'_z(x)^2\ .
\end{aligned} \tag{20}$$

Der Schubterm läßt sich unter Verwendung von Koordinaten in der Querschnittsebene ausschreiben als

$$\big|\mathbf{u}'_p(x) + \mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\psi}_p(x)\big|^2 = \big|v'(x)\,\mathbf{e}_y + w'(x)\,\mathbf{e}_z + \psi_y(x)\,\mathbf{e}_z - \psi_z(x)\,\mathbf{e}_y\big|^2 = \big(v'(x) - \psi_z(x)\big)^2 + \big(w'(x) + \psi_y(x)\big)^2\ . \tag{21}$$

Nun betrachten wir eine virtuelle (gedachte) Verschiebung $\delta\mathbf{u}$ der Stabpunkte im Rahmen des Ansatzes (1) und notieren die dadurch verursachte Änderung der Formänderungsenergie, also die *virtuelle Arbeit* der inneren Kräfte. Wenn nötig, integrieren wir die entstehenden Terme anschließend ein- oder zweimal partiell.

$$\begin{aligned}
\delta E_{\text{def}} = \int_{x=0}^{l} \Big(& EA\, u'(x)\, \delta u'(x) + EI_y \psi'_y(x)\, \delta\psi'_y(x) + EI_z \psi'_z(x)\, \delta\psi'_z(x) + EC_M\, \psi''_x(x)\, \delta\psi''_x(x) \\
& + GA\, \big(v'(x) - \psi_z(x)\big)\big(\delta v'(x) - \delta\psi_z(x)\big) + GA\, \big(w'(x) + \psi_y(x)\big)\big(\delta w'(x) + \delta\psi_y(x)\big) + GI_t\, \psi'_x(x)\, \delta\psi'_x(x) \Big)\, dx \\
= -\int_{x=0}^{l} \Big(& EA\, u''(x)\, \delta u(x) + GA\, \big(v''(x) - \psi'_z(x)\big)\, \delta v(x) + GA\, \big(w''(x) + \psi'_y(x)\big)\, \delta w(x) \\
& + \big(GI_t\, \psi''_x(x) - EC_M\, \psi''''_x(x)\big)\, \delta\psi_x(x) + \Big(EI_y \psi''_y(x) - GA\, \big(w'(x) + \psi_y(x)\big)\Big)\, \delta\psi_y(x) \\
& + \Big(EI_z \psi''_z(x) + GA\, \big(v'(x) - \psi_z(x)\big)\Big)\, \delta\psi_z(x) \Big)\, dx \\
+ \Big[& EA\, u'(x)\ \delta u(x) + GA\, \big(v'(x) - \psi_z(x)\big)\, \delta v(x) + GA\, \big(w'(x) + \psi_y(x)\big)\, \delta w(x) \\
& + \big(GI_t\, \psi'_x(x) - EC_M\, \psi'''_x(x)\big)\, \delta\psi_x(x) + EC_M\, \psi''_x(x)\ \delta\psi'_x(x) + EI_y \psi'_y(x)\ \delta\psi_y(x) + EI_z \psi'_z(x)\ \delta\psi_z(x) \Big]_{x=0}^{l}\ .
\end{aligned} \tag{22}$$

Der linke Rand des Balkens soll eingespannt sein, d.h. es soll gelten $\mathbf{u}\big(x=0,\mathbf{r}_p\big)=\mathbf{0}$. Nach (1) erfordert das

$$u(x=0)=v(x=0)=w(x=0)=\psi_x(x=0)=\psi_y(x=0)=\psi_z(x=0)=0 \tag{23}$$

und bei Querschnitten mit Verwölbung wegen $\phi\big(\mathbf{r}_p\big)\not\equiv 0$ und $C_M\neq 0$ außerdem noch

$$\psi_x'(x=0)=0\ . \tag{24}$$

Das sind die *geometrischen Randbedingungen* des Balkens an einem gefesselten Ende. Auch die virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{u}$ sollen der Einspannbedingung genügen. Damit verschwinden in (22) die Randterme an der unteren Grenze $x=0$.

Im Gleichgewichtsfalle muß die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte gleich der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte sein. Diese besteht aus Arbeiten von Linienkräften und -momenten

$$\delta W_{\text{Feld}}=\int_{x=0}^{l}\big(p_x(x)\,\delta u(x)+p_y(x)\,\delta v(x)+p_z(x)\,\delta w(x)+m_x(x)\,\delta\psi_x(x)+m_y(x)\,\delta\psi_y(x)+m_z(x)\,\delta\psi_z(x)\big)\,dx \tag{25}$$

und Arbeiten der Belastungen (zugleich Schnittgrößen) am rechten Rand $x=l$

$$\delta W_{\text{Rand}}=F_N(l)\,\delta u(l)+F_{Qy}\,\delta v(l)+F_{Qz}\,\delta w(l)+M_t(l)\,\delta\psi_x(l)+M_{by}(l)\,\delta\psi_y(l)+M_{bz}(l)\,\delta\psi_z(l)+B(l)\,\delta\psi_x'(l)\ . \tag{26}$$

Ein Vergleich der Randarbeiten liefert zunächst

$$F_N = EAu'\ , \tag{27}$$

$$F_{Qy} = GA\big(v'-\psi_z\big)\ , \tag{28}$$

$$F_{Qz} = GA\big(w'+\psi_y\big)\ , \tag{29}$$

$$M_t = GI_t\psi_x'-EC_M\psi_x'''\ , \tag{30}$$

$$M_{by} = EI_y\psi_y'\ , \tag{31}$$

$$M_{bz} = EI_z\psi_z'\ , \tag{32}$$

$$B = EC_M\psi_x''\ . \tag{33}$$

Das sind die *natürlichen Randbedingungen* des Balkens an einem freien Ende. Sie zeigen zugleich den Zusammenhang der Schnittgrößen mit den Verformungen. Zu den sechs herkömmlichen Schnittgrößen (Normalkraft, 2 Querkräfte, Torsionsmoment, 2 Biegemomente) ist bei Querschnitten mit Verwölbung neu das Wölbbimoment B hinzugekommen.

Ein Vergleich der Feldarbeiten liefert mit den Bezeichnungen nach (27) bis (32)

$$F_N' = -p_x\ , \tag{34}$$

$$F_{Qy}' = -p_y\ , \tag{35}$$

$$F_{Qz}' = -p_z\ , \tag{36}$$

$$M_t' = -m_x\ , \tag{37}$$

$$M_{by}' = F_{Qz}-m_y\ , \tag{38}$$

$$M_{bz}' = -F_{Qy}-m_z\ . \tag{39}$$

Das sind offenbar die 6 skalaren Gleichgewichtsbedingungen an einem infinitesimalen Balkenelement.

Berücksichtigt man in einer Balkentheorie — wie hier geschehen — die zu den Querkräften gehörigen Schubverformungen, dann spricht man von einem *Timoshenko-Balken.*
Beim *Bernoulli-Balken* werden diese Schubverformungen — da sie meist klein sind — vernachlässigt, indem die folgende *Bernoullische Hypothese* verwendet wird:

$$\psi_z = v' \,, \qquad \psi_y = -w' \,. \tag{40}$$

Zu ermitteln sind dann nicht mehr 6 skalare Funktionen von x, sondern nur noch 4, nämlich u, v, w, ψ_x. Die Gleichungen (28) und (29) sind nicht mehr anwendbar, doch können die Querkräfte — die nunmehr innere Reaktionskräfte darstellen — aus (38) und (39) berechnet werden.

Es bleibt noch die geometrische Bedeutung von $\bar{\mathbf{u}}$ zu klären. Komponentenzerlegung von Gleichung (1) liefert:

$$u_x(x,y,z) = u(x) + \psi_y(x)\,z - \psi_z(x)\,y + \psi_x'(x)\,\phi(y,z)\,, \tag{41}$$

$$u_y(x,y,z) = v(x) - \psi_x(x)\big(z - z_M\big)\,, \tag{42}$$

$$u_z(x,y,z) = w(x) + \psi_x(x)\big(y - y_M\big) \tag{43}$$

und somit

$$\frac{1}{A}\int_A u_x(x,y,z)\,dA = u(x)\,, \tag{44}$$

$$u_y(x,y,z=z_M) = v(x)\,, \tag{45}$$

$$u_z(x,y=y_M,z) = w(x)\,. \tag{46}$$

Somit ist die Längsverschiebung $u(x)$, an der die Normalkraft Arbeit leistet, gleich dem Mittelwert der Längsverschiebungen über den Querschnitt, während $v(x)$ und $w(x)$ sich als Durchsenkungen der Verbindungslinie der Schubmittelpunkte — also i.a. nicht der Stabachse — erweisen. Da die Querkräfte an v bzw. w Arbeit leisten (am freien Stabende), sind sie demnach im Schubmittelpunkt angreifend zu denken — womit der Grund für die Namensgebung dieses Punktes deutlich wird.