Begleitblatt **H** zur Vorlesung **Höhere Festigkeitslehre**
TFH Berlin, FB VIII, Prof. Dr.-Ing. A. Krawietz

Das anisotrope Hookesche Gesetz

Eine tensorwertige Funktion einer tensorwertigen Variablen wird geschrieben als $\mathbf{T}(\mathbf{E})$.
Ist die Funktion speziell homogen-linear, so läßt sie sich mit einem Tensor 4. Stufe $\mathcal{C}$ darstellen als

$$\mathbf{T} = \mathcal{C} \cdot \cdot \mathbf{E}$$

Unter Benutzung einer orthonormierten Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ schreibt sich das als

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} t_{ij}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
= \mathcal{C} \cdot \cdot \mathbf{E} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} c_{ijkl}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \cdot \cdot \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} e_{pq} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} c_{ijkl}\, e_{lk} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j
\end{aligned}$$

also

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} c_{ijkl}\, e_{lk}$$

Ordnet man die 9 Komponenten e_{lk} von $\mathbf{E}$ in einer Spaltenmatrix e und die 81 Komponenten c_{ijkl} von $\mathcal{C}$ in einer quadratischen Matrix C mit neun Zeilen und neun Spalten an, so liefert das Produkt von C mit e die Spaltenmatrix t der 9 Komponenten t_{ij} von $\mathbf{T}$.

Wenn $\mathbf{T}$ und $\mathbf{E}$ den Spannungs- bzw. Verzerrungstensor an einem Punkt eines elastischen Körpers bedeuten, so beschreibt $\mathbf{T} = \mathcal{C} \cdot \cdot \mathbf{E}$ lineares, aber i. allg. anisotropes elastisches Verhalten (Allgemeines Hookesches Gesetz). Weil dann $\mathbf{T}$ und $\mathbf{E}$ symmetrische Tensoren sind, sind Vereinfachungen möglich (Cauchy und Poisson, 1829).

So wird man die 6 wesentlichen Komponenten von $\mathbf{T}$ und $\mathbf{E}$ in Spaltenmatrizen mit nur je 6 Zeilen zusammenfassen. Weil man dann ferner festlegt

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk}$$

lassen die 36 wesentlichen Komponenten von $\mathcal{C}$ sich in einer quadratischen Matrix mit 6 Zeilen und 6 Spalten anordnen.

1. Methode (mathematisch konsistent):

$$t = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ \sqrt{2}\,t_{12} \\ \sqrt{2}\,t_{13} \\ \sqrt{2}\,t_{23} \end{pmatrix} \qquad e = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ \sqrt{2}\,e_{12} \\ \sqrt{2}\,e_{13} \\ \sqrt{2}\,e_{23} \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \begin{array}{c} t^T t = \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{T} \\[1ex] e^T e = \mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{E} \\[1ex] t^T e = \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{E} \end{array}$$

$$t = Ce \qquad \text{mit} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & \sqrt{2}\,c_{1112} & \sqrt{2}\,c_{1113} & \sqrt{2}\,c_{1123} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & \sqrt{2}\,c_{2212} & \sqrt{2}\,c_{2213} & \sqrt{2}\,c_{2223} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & \sqrt{2}\,c_{3312} & \sqrt{2}\,c_{3313} & \sqrt{2}\,c_{3323} \\ \sqrt{2}\,c_{1211} & \sqrt{2}\,c_{1222} & \sqrt{2}\,c_{1233} & 2c_{1212} & 2c_{1213} & 2c_{1223} \\ \sqrt{2}\,c_{1311} & \sqrt{2}\,c_{1322} & \sqrt{2}\,c_{1333} & 2c_{1312} & 2c_{1313} & 2c_{1323} \\ \sqrt{2}\,c_{2311} & \sqrt{2}\,c_{2322} & \sqrt{2}\,c_{2333} & 2c_{2312} & 2c_{2313} & 2c_{2323} \end{pmatrix}$$

2. Methode (meist in FEM-Programmen realisiert):

$$t = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} \qquad e = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{13} \\ 2e_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \begin{array}{c} t^T t \neq \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{T} \\ e^T e \neq \mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{E} \\[1ex] t^T e = \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{E} \end{array}$$

$$t = Ce \qquad \text{mit} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1123} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2223} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3323} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1223} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1312} & c_{1313} & c_{1323} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} & c_{2313} & c_{2323} \end{pmatrix}$$

Die Existenz einer volumenspezifischen Formänderungsenergie $w(\mathbf{E})$ (sog. Hyperelastizität) verlangt, daß die differentielle Formänderungsarbeit ein totales Differential ist, also

$$\mathbf{T}\cdot\cdot d\mathbf{E} = d\mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{T} = d\mathbf{E}\cdot\cdot\mathcal{C}\cdot\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(d\mathbf{E}\cdot\cdot\mathcal{C}\cdot\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\cdot\mathcal{C}^T\cdot\cdot d\mathbf{E}\right) = d\,\frac{1}{2}\,\mathbf{E}\cdot\cdot\mathcal{C}\cdot\cdot\mathbf{E} = dw$$

Es gilt also

$$w(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{E}\cdot\cdot\mathcal{C}\cdot\cdot\mathbf{E}$$

genau dann, wenn $\mathcal{C}$ die Symmetrie

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^T \qquad \Leftrightarrow \qquad c_{ijkl} = c_{klij}$$

besitzt. Das spiegelt sich in der Symmetrie der Matrix C wieder (und zwar bei der Definition nach der 1. ebenso wie nach der 2. Methode).

Zur Kennzeichnung der allgemeinsten linearen elastischen *Anisotropie* werden also *21 Materialkonstanten* benötigt.