

PROF. DR.-ING. ARNOLD KRAWIETZ
TECHNISCHE FACHHOCHSCHULE BERLIN
FACHBEREICH MASCHINENBAU, VERFAHRENS-
UND UMWELTTECHNIK

Abschiedsvorlesung:

Merkwürdiges aus 50 Jahren Mechanik

Berlin, den 23. Januar 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Elementare Mechanik: Ursachen und Wirkungen	2
1.1	Hebelgesetz	2
1.2	Hydrostatik	2
1.3	Arbeitssatz	3
2	Kinetik des Massenpunktes: Notwendigkeit oder Freiheit?	4
3	Höhere Festigkeitslehre: Stetiges oder unstetiges Verhalten?	5
3.1	Kerbwirkung	5
3.2	Ersatz einer Kreisplatte durch eine Polygonplatte	6
4	Materialtheorie: Drei Arten von Elastizität	7
4.1	Metalle	7
4.2	Ideales Gas	7
4.3	Gummi	8
5	Monomolekulare Filme: Symmetriebrechung	8

Mit der Mechanik wird man erstmals im Physik-Unterricht der Schule bekannt gemacht. Das ist bei mir nun mehr als 50 Jahre her. Vieles, was mir seitdem während meiner Beschäftigung mit der Mechanik begegnete, ist es wert, in Erinnerung zu bleiben, es ist also *merkwürdig* im ursprünglichen Wortsinne. Dabei handelt es sich aber meistens zugleich um das Ungewohnte, Überraschende, Unerwartete, also das *Merkwürdige* im heutigen Gebrauch des Wortes. Einiges davon möchte ich hier ansprechen.

1 Elementare Mechanik: Ursachen und Wirkungen

1.1 Hebelgesetz

Gleich zu Beginn der Beschäftigung mit der Mechanik lernt man, dass es mittels eines abgewinkelten Hebels möglich ist, aus einer kleinen Gewichtskraft eine beliebig große Kraft in beliebiger Richtung zu erzeugen. Offenbar gilt hier: „Aus Wenig mach Viel“, ohne dass Mühe aufgewendet werden muss. Dass aber auch in der Mechanik die Bäume nicht in den Himmel wachsen, erkennt man nach Einführung der Konzepte Arbeit und Energie. Wenn wir beispielsweise eine Feder spannen wollen, dann benötigen wir eine bestimmte Formänderungsenergie, und diese ist gleich der Arbeit, die von der verursachenden Kraft geleistet wird. Greift eine Kraft weiter außen an einem Hebel an, so ist sie zwar kleiner, der Weg ihres Angriffspunktes aber ist größer, so dass sie genau dieselbe Arbeit leisten muss, wie eine größere Kraft an einem kürzeren Hebelarm.

1.2 Hydrostatik

Betrachten wir einen Flüssigkeitsbehälter, der oben durch einen Stein verschlossen und seitlich mit einem Standrohr verbunden ist. Füllt man in dieses Wasser, so wird der Druck im Behälter steigen und schließlich bei einem bestimmten Wasserstand bewirken, dass der Stein angehoben wird. Ursache der Erscheinung ist offenbar die Gewichtskraft des Wassers im Standrohr. Erstaunlich ist zunächst, dass diese abwärts wirkt, aber eine nach oben auf den Stein wirkende Kraft hervorruft. Seltsamer ist, dass diese Kraft vom Durchmesser des Standrohres und damit von der Gewichtskraft des Wassers gar nicht abhängt. Schließlich ist zu bedenken, dass die Gewichtskraft der Füllung des Standrohres ja von dessen Boden aufgenommen wird. Wie kann dann eine Einwirkung auf den Behälter in horizontaler Richtung erfolgen?

Alle diese Fragen klären sich, wenn man das Verhalten einer ruhenden Flüssigkeit durch die Tatsache kennzeichnet, dass sie keine Schubspannungen übertragen kann. Schneidet man dann im Sinne von Euler und Cauchy gedanklich einen Keil aus der Flüssigkeit heraus und fordert Gleichgewicht der Kräfte, so beansprucht die Gewichtskraft der auflastenden Flüssigkeit die obere (horizontale) Fläche mit einer vertikal wirkenden Kraft, der in der unteren (unter 45° geneigten) Fläche eine gleich große vertikale Kraft entgegenwirken muss. Zu dieser muss eine gleich große horizontal wirkende Kraft hinzutreten, damit die Resultierende senkrecht auf der Fläche steht, also keine Schubspannungen hervorruft. Man schließt daraus, dass die Drücke in vertikaler und horizontaler Richtung (und übrigens dann auch in jeder beliebigen Richtung) gleich sein müssen.

1.3 Arbeitssatz

Der Arbeitssatz der Mechanik für deformierbare Körper, der leider nicht einmal in den gebräuchlichen Hochschullehrbüchern behandelt wird, lautet

$$W_a = W_i + \Delta E_{\text{kin}}$$

In Worten: Die von den äußeren Kräften an einem Körper geleistete Arbeit setzt sich um zum einen Teil in die Arbeit der inneren Kräfte, also Formänderungsarbeit, und zum anderen Teil in eine Änderung der kinetischen Energie des Körpers. Wenden wir den Satz nun an auf den Aufprall eines Fahrzeugs auf ein starres Hindernis. Was ist die Ursache für die Zerstörung des Fahrzeugs? Natürlich die äußere Kraft, die von dem Hindernis auf das Fahrzeug einwirkt. Diese leistet allerdings keinerlei Arbeit, denn ihr Angriffspunkt verschiebt sich nicht. Es gilt also $W_a = 0$ und damit, weil das Fahrzeug ja durch den Aufprall abgebremst wird,

$$W_i = -\Delta E_{\text{kin}} > 0$$

Die positive Formänderungsarbeit W_i , die während der plastischen Verformung des Fahrzeugs in Wärme umgewandelt wird, stammt also aus der Abnahme der Bewegungsenergie des Fahrzeugs. Dieses bringt also die Energie zu seiner Vernichtung selbst mit. Das Hindernis hat nur die Funktion eines Katalysators bei dieser Energieumwandlung.

2 Kinetik des Massenpunktes: Notwendigkeit oder Freiheit?

Vor zweihundert Jahren baute Laplace auf der Newton'schen Mechanik folgendes Weltbild auf: Gäbe es einen Dämon, dem die aktuellen Werte von Lage und Impuls aller Materie bekannt wären, dann könnte dieser durch Integration der Bewegungsgleichungen präzise Vorhersagen über Zustände in beliebig ferner Zukunft treffen. Das Weltgeschehen lief also mit zwingender Notwendigkeit ab. Hundert Jahre später verschärfte Poincaré die Anforderungen an den Dämon durch die Entdeckung, dass die Anfangsbedingungen mit unendlicher Genauigkeit bekannt sein müssen, um eine Prognose zu ermöglichen. Das bereits beim Doppelpendel beobachtbare chaotische Verhalten bedeutet nämlich, dass Lösungen nicht immer stetig von den Anfangsbedingungen abhängen. Wenig später zeigte die Quantenmechanik, dass Lage und Impuls nicht gleichzeitig genau bekannt sein können. Der radioaktive Zerfall eines Teilchens ist offenbar nicht determiniert, doch gibt die Halbwertszeit immerhin an, wann die Hälfte einer großen Zahl von Teilchen zerfallen sein wird.

Vielleicht lässt ja aber bereits die Newton'sche Mechanik eine noch weitergehende Freiheit des Verhaltens zu? Zu diesem Zweck betrachten wir folgende Kurve als mögliche Bahn eines Massenpunktes unter dem Einfluss seines Eigengewichts:

$$x = \frac{2}{3} L \left(1 - \left(1 - \frac{s}{L} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \quad z = \frac{2}{3} L \left(\frac{s}{L} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Die Koordinate x verläuft horizontal, z nach unten, und der Parameter s bezeichnet die Bogenlänge. Das Newton'sche Grundgesetz in Richtung der Bahntangente lautet

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg \sin \phi \quad \text{mit} \quad \sin \phi = \frac{dz}{ds}$$

oder

$$\ddot{s} = g \sqrt{\frac{s}{L}}$$

Fügen wir die Anfangsbedingungen

$$s(t=0) = 0, \quad \dot{s}(t=0) = 0$$

hinzu, so sind folgende Lösungen möglich.

$$s(t) \equiv 0 \quad \text{oder} \quad s(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } 0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{g^2}{144L} (t - t_0)^4 & \text{wenn } t > t_0 \end{cases}$$

Der Massenpunkt kann also für immer in seiner Ausgangslage verharren oder diese zu irgendeinem Zeitpunkt t_0 verlassen. Im vorliegenden Falle gibt es unendlich viele Lösungen der Bewegungsgleichung, weil die für Eindeutigkeit erforderliche Lipschitz-Bedingung verletzt ist. Offenbar hat der Massenpunkt völlige Freiheit, ob und wann er seine Ruhelage verlassen will. Was wird er wohl tun?

3 Höhere Festigkeitslehre: Stetiges oder unstetiges Verhalten?

3.1 Kerbwirkung

Betrachten wir eine Scheibe aus isotrop-elastischem Material, die durch eine konstante Normalspannung σ_0 in y -Richtung belastet wird. Nun bohren wir ein Loch vom Radius a hinein. Wo das Loch sich befindet, kann jetzt keine Kraft übertragen werden. Diese muss daher rechts und links um das Loch herum laufen, also die dortigen Spannungen erhöhen, und die Rechnung ergibt folgenden Spannungsverlauf

$$\sigma(x) = \sigma_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{x} \right)^4 \right) \quad \text{für} \quad |x| \geq a$$

Bereits im Abstand eines Lochdurchmessers $2a$ vom Lochrand ist der Einfluss der Bohrung nahezu abgeklungen. An der Lochleibung erhalten wir dagegen den Kerbfaktor

$$\alpha = \frac{\max \sigma}{\sigma_0} = \frac{\sigma(x=a)}{\sigma_0} = 3$$

also eine Spannungsüberhöhung um 200%.

Bemerkenswert ist nun, dass der Kerbfaktor unabhängig vom Lochradius den konstanten Wert 3 besitzt, während doch in der Scheibe ohne Bohrung keine Spannungsüberhöhung stattfindet, also $\alpha = 1$ gilt. Lässt man den Lochradius immer kleiner werden, so konvergiert also die Lösung nicht gegen die der Scheibe ohne Loch, sie kann somit als unstetig bezeichnet werden. Dagegen ist die am Loch vorbeizuführende Kraft

$$f = 2\sigma_0 t a$$

(mit der Scheibendicke t) proportional zu a . Sie geht also gegen Null, wenn a nach Null geht, und damit gegen den Wert der ungelochten Scheibe, ist also stetig.

3.2 Ersatz einer Kreisplatte durch eine Polygonplatte

Betrachten wir eine Kreisplatte und eine flächengleiche Polygonplatte aus isotrop-elastischem Material unter Gleichlast, die am Rand gelagert sind. Schon ein numerischer Vergleich der Lösungen für den Kreis und ein 16-Eck zeigt, dass die Abweichungen der Durchsenkung w und des Biegemoments in Plattenmitte weit weniger als 1 Prozent betragen. Voraussetzung ist natürlich, dass die Randbedingungen beider Platten übereinstimmen. Bei Erhöhung der Zahl der Ecken geht die Abweichung gegen Null, d.h., wir haben stetiges Verhalten.

Die Richtungen tangential und normal zum Rand sollen mit t und n bezeichnet werden. Beim eingespannten Rand gilt $w = 0$ (und damit auch $w_{,t} = 0$) sowie $w_{,n} = 0$. (Das Komma soll partielle Ableitung anzeigen.) Zusammenfassend kann man diese Randbedingungen auch durch die koordinateninvariante Forderung $\nabla w = 0$ kennzeichnen. Beim gelenkig gelagerten Rand der Polygonplatte gilt $w = 0$ (und damit auch $w_{,t} = 0$ und $w_{,tt} = 0$) sowie die Forderung, dass das Randbiegemoment verschwindet, also — wenn wir uns auf Material ohne Querkontraktion (d.h., mit $\nu = 0$) beschränken — $w_{,nn} = 0$. Damit muss aber auch $\Delta w = w_{,tt} + w_{,nn} = 0$ sein. Der Rand lässt sich also in koordinateninvarianter Weise durch die Navier'schen Randbedingungen $w = 0$, $\Delta w = 0$ von 1821 beschreiben. Beim Vergleich müssen diese Randbedingungen natürlich auch der Kreisplatte auferlegt werden.

Wichtig ist nun, dass die Navier'schen Randbedingungen einer Kreisplatte keine gelenkige Lagerung des Randes beschreiben. In Polarkoordinaten gilt nämlich

$$\Delta w = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}$$

und $\Delta w = 0$ bedeutet demnach

$$w_{,nn} = -\frac{1}{r} w_{,n}$$

also einen Zusammenhang zwischen dem Randmoment und der Randneigung. Das ist die Beschreibung eines elastisch eingespannten Randes, wobei $1/r$ den Charakter einer Drehfederkonstante besitzt.

Es handelt sich um das Paradoxon von Babuska: Eine Folge gelenkig gelagerter Polygonplatten konvergiert mit wachsender Zahl der Ecken nicht gegen die gelenkig gelagerte Kreisplatte. Dies wird man als unstetiges Verhalten ansehen.

Bei der Anwendung Finiten Elemente darf diese Erkenntnis nicht unbeachtet bleiben. Ersetzt man nämlich eine krummlinig berandete und gelenkig gelagerte Platte durch eine solche mit polygonalem Rand, so muss man den

Rand der Polygonplatte elastisch einspannen und zwar mit einer negativen Steifigkeit der Drehfeder! Anderenfalls können die Ergebnisse Fehler von mehr als 100% aufweisen.

4 Materialtheorie: Drei Arten von Elastizität

Elastizität lässt sich durch das Verhalten einer Feder veranschaulichen, wie schon Robert Hooke 1686 beschrieben hat. Dennoch kann sie mikromechanisch ganz unterschiedliche Ursachen haben.

4.1 Metalle

Die Kristallite eines polykristallinen Metalls weisen eine ziemlich regelmäßige Atomanordnung auf. Die Elastizität beruht auf den Wechselwirkungskräften zwischen den Atomen, und die innere Energie hängt daher wesentlich von den Formänderungen des Kristalls ab.

4.2 Ideales Gas

Bei einem stark verdünnten Gas sind die Wechselwirkungskräfte zwischen den Atomen oder Molekülen vernachlässigbar, und die innere Energie einer Gasmenge ist von ihren Formänderungen vollkommen unabhängig. Der Druck im Gas lässt sich durch die Stöße zwischen dem Gas und den Behälterwänden deuten. Bedeuten p , v , θ und ϵ den Druck, das Volumen je Masseneinheit, die absolute Temperatur und die innere Energie je Masseneinheit, dann gilt mit zwei das betreffende Gas kennzeichnenden Materialkonstanten β und c_V

$$p v = \beta \theta \qquad \epsilon = c_V \theta$$

Daraus ermittelt sich die innere Energie je Volumeneinheit zu

$$\frac{\epsilon}{v} = \frac{c_V}{\beta} p$$

und man bemerkt das paradoxe Ergebnis, auf das Sommerfeld aufmerksam gemacht hat: Wenn man einen Raum heizt, dann ändert man den Energieinhalt der Raumluft nicht. Volumen und Druck sind nämlich gleich geblieben. Die zugeführte Wärme aber ist zur Gänze durch die Ritzen ins Freie entwichen.

4.3 Gummi

Es mag überraschen, dass auch beim Gummi die innere Energie von den Gestaltänderungen völlig unabhängig und nur eine Temperaturfunktion ist. (Volumenänderungen wollen wir vernachlässigen, weil Gummi nahezu inkompressibel ist.) Das rührt daher, dass Gummi aus zusammengefalteten Kettenmolekülen aufgebaut ist, die sich ohne Dehnung in eine gestreckte Lage bringen lassen. Wie lässt sich dann aber die Kraft in einem Gummiband erklären?

Das sehen wir schon an einem Modell, das aus nur zwei Stäben besteht, die gelenkig miteinander verbunden sind. Dieser Stabzug soll mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse rotieren. Denken wir uns die Masse m am Gelenk konzentriert und nennen ihren Abstand von der Drehachse a , so ist ihre kinetische Energie $E = m\omega^2 a^2/2$ und es wirkt auf sie eine Zentrifugalkraft $F_Z = m\omega^2 a = 2E/a$. Eine geometrische Betrachtung liefert

$$4a^2 = L^2 - l^2$$

wobei l und L die aktuelle bzw. gestreckte Länge des Stabzugs bedeuten, und die Gleichgewichtsbedingungen am Stabzug zeigen, dass eine Kraft

$$F = E \frac{2l}{L^2 - l^2}$$

benötigt wird, um die Gesamtlänge l aufrecht zu erhalten. Überträgt man die Gleichung ins Dreidimensionale, indem man für F und l Spannung und volumentreue Verzerrung und als Maß für die Energie E die absolute Temperatur setzt, so hat man das Verhalten von Gummi qualitativ richtig beschrieben. Übrigens erkennt man aus der Gleichung, dass die Länge sich bei festgehaltener Kraft verringern muss, wenn Energie zugeführt wird, und in der Tat verkürzt sich ein Gummiband bei Erwärmung, während ein Kristallgitter sich ausdehnt.

5 Monomolekulare Filme: Symmetriebrechung

Beim Studium dünner Filme im Nanobereich stellt man fest, dass diese teilweise Formen mit zwei entgegengesetzten Krümmungen einnehmen. Obwohl man den Film als isotrop wird ansehen können, bevorzugt er eine anisotrope Konfiguration, also eine, welche ausgezeichnete Richtungen besitzt, nämlich die beiden Hauptkrümmungsrichtungen. Dieses Phänomen wird als Symmetriebrechung bezeichnet.

Eine ähnliche Beobachtung macht man bei einer austrocknenden Brotscheibe. Zur Erklärung können wir annehmen, dass die äußeren Schichten zuerst austrocknen und sich zusammenziehen wollen. Wenn eine Krümmung k mit dem Radius $R = 1/k$ aufgebracht wird, dann ändern die ursprünglichen Längen l auf den beiden Oberflächen, die den Abstand a von der Mittelfläche haben, sich in

$$l_+ = \frac{R+a}{R} l = (1+ka) l \quad l_- = \frac{R-a}{R} l = (1-ka) l$$

Werden nun Krümmungen k_1 und k_2 in den beiden (aufeinander senkrechten) Hauptkrümmungsrichtungen aufgebracht, dann ändert der ursprüngliche Flächeninhalt $A = l_1 l_2$ sich in

$$A_+ = l_{1+} l_{2+} = (1+k_1 a)(1+k_2 a) A \quad A_- = l_{1-} l_{2-} = (1-k_1 a)(1-k_2 a) A$$

Die Summe beider Oberflächen ergibt sich als

$$A_+ + A_- = (1 + k_1 k_2 a^2) 2 A$$

Eine Verringerung der Gesamtoberfläche erfordert, dass die Gauss'sche Krümmung $k_1 k_2$ negativ ist, also die zwei Hauptkrümmungen in entgegengesetzte Richtungen weisen. Eine solche Fläche weist aber ausgezeichnete Richtungen auf.